

## 15. Kovinski valovod

Potujoči ravninski val opisuje pojav v neomejenem prostoru. Stojni val v votlinskem rezonatorju je sestavljen iz dveh ali več potujočih valov v omejenem prostoru, ki ga omejujejo okovinjene ploskve z ničelno  $\vec{E}_t = 0$  tangencialno komponento električnega polja. Končno lahko iz dveh ali več potujočih ravninskih valov sestavimo tudi kombinacijo stojnega vala v eni ali dveh dimenzijah ter potujočega vala v preostali dimenziji prostora.

Preprost zgled kombinacije dveh potujočih ravninskih valov, ki ju opisujeta valovna vektorja  $\vec{k}_1$  in  $\vec{k}_2$ , tvori stojni val v smeri osi  $y$  in napredujoči val v smeri osi  $z$ :

### Kombinacija stojni/potujoči val

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x C \cos(k_y y) e^{-j\beta z}$$

$$k_y^2 + \beta^2 = k^2$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x \frac{C}{2} (e^{jk_y y} + e^{-jk_y y}) e^{-j\beta z}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x \frac{C}{2} [e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}]$$

$$\vec{k}_2 = \vec{1}_y k_y + \vec{1}_z \beta$$

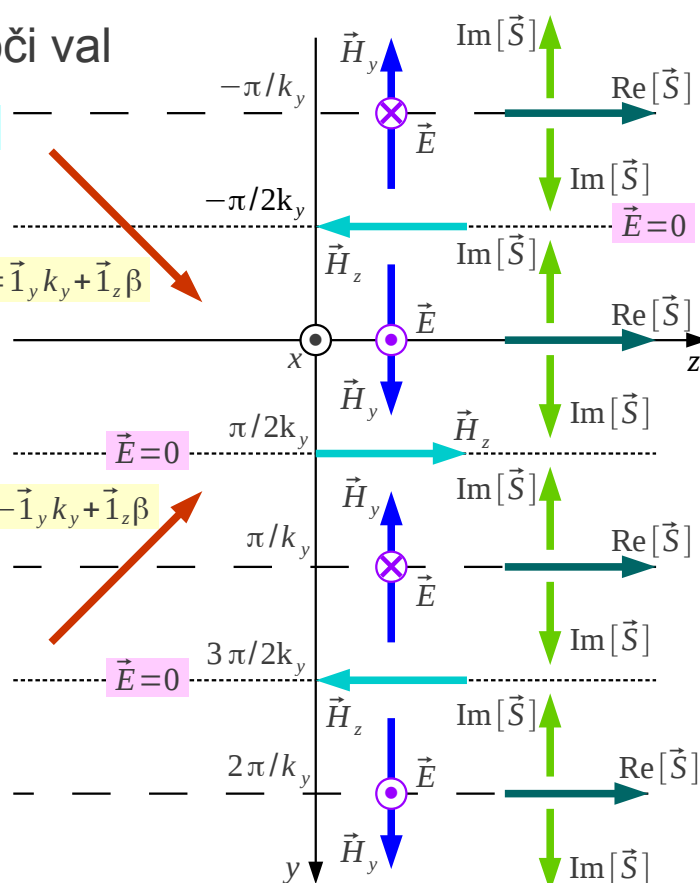
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega \mu} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{j}{kZ} \text{rot } \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{1}_y \frac{C\beta}{kZ} \cos(k_y y) e^{-j\beta z} + \vec{1}_z \frac{jCk_y}{kZ} \sin(k_y y) e^{-j\beta z}$$

$$\vec{k}_1 = -\vec{1}_y k_y + \vec{1}_z \beta$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = \vec{1}_y \frac{j|C|^2 k_y}{2kZ} \cos(k_y y) \sin(k_y y) + \vec{1}_z \frac{|C|^2 \beta}{2kZ} \cos^2(k_y y)$$



Skladno z razlago valov ima pripadajoči Poyntingov vektor  $\vec{S}$  povsem delovno komponento  $\vec{1}_z S_z = \text{Re}[\vec{S}]$  v smeri potujočega vala in popolnoma jalovo komponento  $\vec{1}_y S_y = j \text{Im}[\vec{S}]$  v smeri stojnega vala. V koordinatnih smereh, v katerih je Poyntingov vektor povsem jalov, lahko stojni val prostorsko omejimo, torej okovinimo ploskve, kjer je tangencialna električna

poljska jakost  $\vec{E}_t = 0$  enaka nič.

V smeri potujočega vala prostora ne omejujemo, pač pa uporabimo predlagano napravo, da vodi valovanje natančno v tej smeri. Zamisel se je pojavila že v drugi polovici 19. stoletja. Matematično nalogo je razrešil Lord Rayleigh in leta 1897 dokazal, da votla kovinska cev poljubnega prereza lahko vodi elektromagnetno valovanje v obliki različnih rodov. Šele z razvojem mikrovalovne tehnike in radarja v prvi polovici 20. stoletja postane kovinski valovod z eno samo votlo cevjo, bolj točno votlovod (nemško: Hohlleiter, angleško: hollow waveguide), praktično uporabna in koristna naprava.

Pri opisani kombinaciji stojni/potujoči val smemo okoviniti natančno določene ploskve, vzporedne z ravnino  $xz$ , ki ustrezajo vozlom stojnega vala električnega polja. Hkrati smemo okoviniti poljubno ploskev, vzporedno ravnini  $yz$ , saj je električno polje nanjo pravokotno. Z okovinjanjem dobimo kovinsko cev pravokotnega prereza  $a \times b$ , ki deluje kot pravokotni kovinski votlovod:

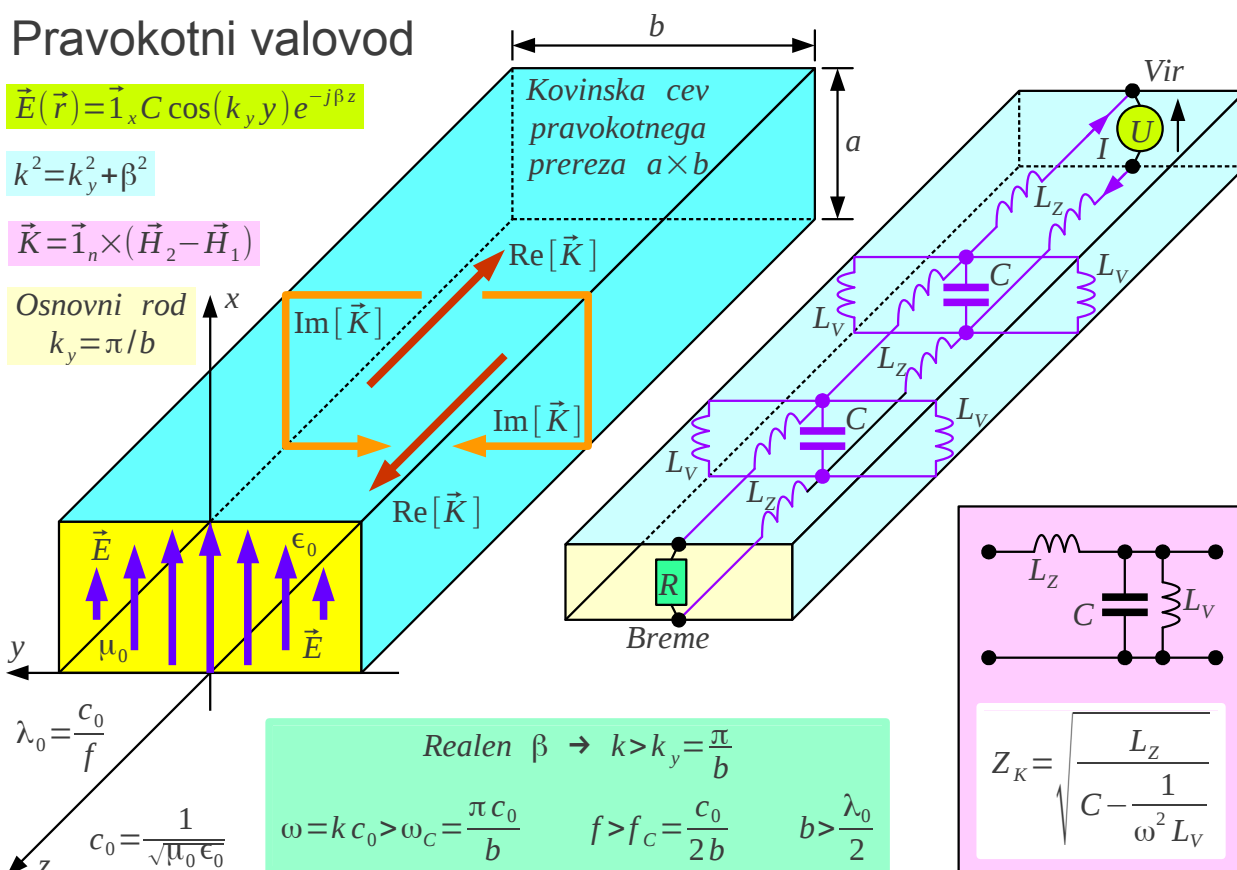
## Pravokotni valovod

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x C \cos(k_y y) e^{-j\beta z}$$

$$k^2 = k_y^2 + \beta^2$$

$$\vec{K} = \vec{1}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)$$

Osnovni rod  
 $k_y = \pi/b$



Notranjost cevi je lahko popolnoma prazen prostor s permeabilnostjo  $\mu_0$  in dielektričnostjo  $\epsilon_0$ . Kovinski valovod lahko sicer izdelamo tudi z notranjostjo iz dielektrika z  $\epsilon_r > 1$  oziroma iz feromagnetika z  $\mu_r > 1$ , vendar ima takšna naprava običajno slabše električne lastnosti oziroma višje

izgube od pravega votlovoda. Notranjost pravokotnega valovoda zato kvečjemu zapolnimo z osušenim zrakom pod nadtlakom, da preprečimo vdor vlage. Prenos velikih moči zahteva v notranjosti cevi izolacijski plin, na primer žveplov heksafluorid  $\text{SF}_6$ , ki ima višjo električno prebojno trdnost od zraka.

Mejni pogoji za magnetno polje  $\vec{H}$  zahtevajo ploskovne tokove  $\vec{K}$  v vseh okovinjenih ploskvah, ko zunaj cevi ni elektromagnetnega polja. Ploskovni tokovi so povsem jalovi  $\text{Im}[\vec{K}]$  v smeri stojnega vala in povsem delovni  $\text{Re}[\vec{K}]$  v smeri potujočega vala. Ploskovni tok nam tudi pove, kam priključiti izmenični vir, kam breme in kakšno je pričakovano električno obnašanje opisane naprave?

Zgornja in spodnja, torej široki stranici  $(b)$  opisanega valovoda se obnašata kot trakasti dvovod s porazdeljeno zaporedno induktivnostjo  $L_z$  in porazdeljeno medsebojno kapacitivnostjo  $C$ . Bočni oziroma ozki stranici  $(a)$  se obnašata kot dodatna porazdeljena vzporedna induktivnost  $L_v$ . Pravokotni votlovod opišemo torej z nadomestnim vezjem, še bolj natančno z verižno vezavo velikega števila takšnih vezij za diferencialno kratke odseke votlovoda.

Iz nadomestnega električnega vezja ugotovimo, da je karakteristična impedanca  $Z_K$  pri nizkih frekvencah povsem reaktivna (jalova). Karakteristična impedanca postane pri določeni frekvenci  $\omega_C = 1/\sqrt{L_v C}$  neskončno velika in od tam naprej je pri visokih frekvencah povsem delovna (realna). Pravokotni kovinski valovod se obnaša torej kot visokoprepustno frekvenčno sito.

Do enakovredne ugotovitve pridemo iz zapisa elektromagnetnega polja v pravokotnem kovinskem valovodu. Če naj naprava vodi valovanje, mora biti fazna konstanta  $\beta = \sqrt{k^2 - k_y^2}$  povsem realna. Torej mora veljati  $k > k_y$  oziroma  $\omega > \omega_C$  oziroma  $f > f_C$ , kjer indeks  $C$  pomeni frekvenčno mejo, angleško: cutoff frequency. Frekvenčno mejo si zapomnimo iz pogoja za širšo stranico valovoda  $b > \lambda_0/2$ , ki mora biti širša od polovice valovne dolžine  $\lambda_0$  v neomejenem prostoru z enakimi snovnimi lastnostmi, kot jih ima notranjost cevi.

Električno nadomestno vezje se izogiblje izmeram resnične naprave. Hitrost valovanja lahko torej določimo samo iz elektromagnetnega polja, ki ga zapišemo v časovnem prostoru  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . Hitrost valovanja, ki vsebuje eno samo frekvenco  $\omega$ , dobimo iz pogoja za fazo. Če jezdimo na valu v isti točki, se faza ne sme spreminjati. Rezultat je na prvi pogled presenetljiv,

fazna hitrost (angleško: phase velocity)  $v_f > c_0$  je vedno večja od svetlobne hitrosti za katerikoli rod  $m$  nad svojo pripadajočo frekvenčno mejo  $f > f_{0m}$  :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x C \cos(k_y y) e^{-j\beta z}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x \frac{C}{2} [e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}]$$

$$\text{Rodovi TE}_{0m}$$

$$k_y = m \cdot \frac{\pi}{b} \quad m = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{1}_x \cos(k_y y) \operatorname{Re}[C e^{j(\omega t - \beta z)}]$$

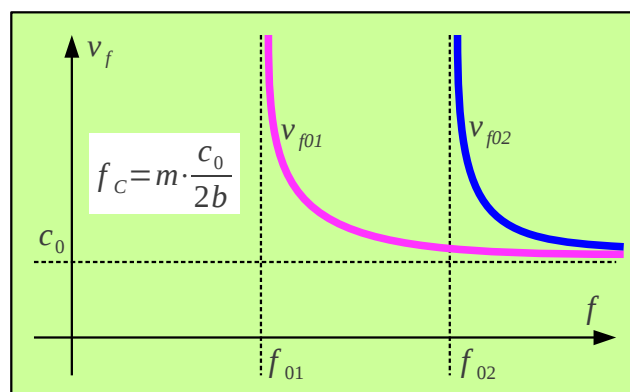
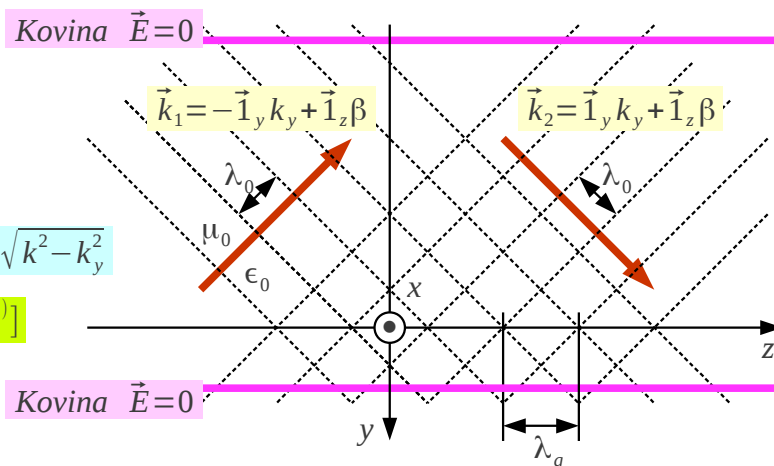
Jezdimo na valu:  
Faza  $\omega t - \beta z = \text{konst.}$

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta z) = 0 = \omega - \beta \frac{dz}{dt} = \omega - \beta v_f$$

$$\text{Fazna hitrost} \quad v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k^2}}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}} > c_0$$

$$\text{Valovodna valovna dolžina} \quad \lambda_g = \frac{v_f}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}} > \lambda_0$$

Fazna hitrost



Razlaga postane nazornejša, če ne okovino dveh sosednjih vozlov električnega polja, pač pa izberemo okovljeni ploskvi tako, da je med njima  $m$  hrbtov stojnega vala električne poljske jakosti. Na gornji sliki ravninskih valov  $\vec{k}_1$  in  $\vec{k}_2$  ima stojni val  $m=9$  hrbtov, kar ustreza rodu valovanja  $\text{TE}_{09}$  med okovljenima ravninama. Valovne fronte vsakega ravninskega vala so pravokotne na pripadajoči valovni vektor in so med sabo razmaknjene za valovno dolžino  $\lambda_0$  v praznem prostoru.

Navidezna valovna dolžina v valovodu  $\lambda_g = 2\pi/\beta$  (angleško: lambda guided) je razdalja med projekcijama dveh sosednjih valovnih front na os  $z$  in je zato nujno večja  $\lambda_g > \lambda_0$  od valovne dolžine v praznem prostoru. Projekcija  $\lambda_g = v_f/f$  je lahko zelo velika in postane celo neskončna  $\lambda_g \rightarrow \infty$  tik ob mejni frekvenci  $f \approx f_{0m}$  pripadajočega rodu valovanja. Z višanjem frekvence se fazna hitrost kateregakoli rodu valovanja znižuje in približuje  $v_f \rightarrow c_0$  hitrosti svetlobe v praznem prostoru.

Opisani pojavi niso v nasprotju z relativistiko. Relativistika sicer zahteva, da niti energija niti informacija ne moreta potovati s hitrostjo, večjo od svetlobe. Fazno hitrost  $v_f$  smo izračunali za eno samo frekvenco  $\omega$  z neskončno ozkim spektrom, takšen signal zato ne prenaša nobene informacije. Valovna dolžina  $\lambda_g$  v valovodu je samo projekcija, ki je lahko poljubno velika.

Hitrost potovanja energije oziroma informacije imenujemo skupinska hitrost  $v_g$  (angleško: group velocity). Določimo jo iz hitrosti potovanja ovojnice signala, ki vsebuje najmanj dve različni frekvenci  $\omega_1$  in  $\omega_2$  :

**Dvotonsko krmiljenje**  $\omega_A, \omega_B \gg \omega_A - \omega_B = \Delta\omega$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{1}_y \cos(k_y y) \operatorname{Re} \left[ A e^{j(\omega_A t - \beta_A z)} + B e^{j(\omega_B t - \beta_B z)} \right]$$

$$\phi_A = \omega_A t - \beta_A z \quad \langle \phi \rangle = (\phi_A + \phi_B)/2 \quad \dots \text{hiter!}$$

$$\phi_B = \omega_B t - \beta_B z \quad \Delta \phi = \phi_A - \phi_B \dots \text{počasen!}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{1}_x \cos(k_y y) \operatorname{Re} \left[ e^{j\langle \phi \rangle} (A e^{j\Delta\phi/2} + B e^{-j\Delta\phi/2}) \right]$$

*Jezdimo na ovojnici:*

$$\Delta \phi = \Delta \omega t - \Delta \beta z = \text{konst.}$$

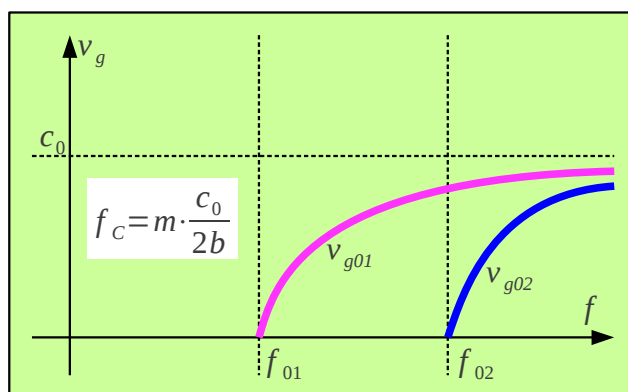
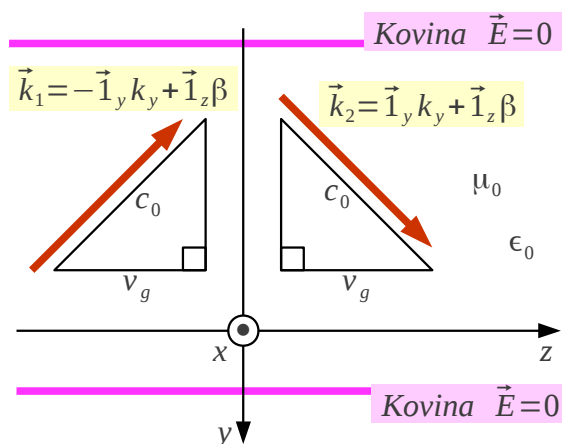
$$\frac{d}{dt}(\Delta \omega t - \Delta \beta z) = 0 = \Delta \omega - \Delta \beta \frac{dz}{dt}$$

$$\text{Skupinska hitrost } v_g = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta}$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \sqrt{k^2 - k_y^2} = \frac{2\omega/c_0^2}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} = \frac{1}{c_0 \sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k^2}}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c_0 \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}} < c_0$$

# Skupinska hitrost



Električno polje  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  dvotonskega krmiljenja zapišemo v časovnem prostoru. Zapis razstavimo na hitri člen in počasne člene. Počasni členi nihajo s polovico razlike frekvenc  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , ki je lahko poljubno majhna, torej poljubno počasen pojav. Skupinsko hitrost  $v_g$  določimo tako, da jezdimo na ovojnici, ki jo določajo počasni členi. Skupinska hitrost  $v_g < c_0$  je vedno manjša od svetlobne hitrosti ravninskih valov v notranjosti votlovala, kar je povsem v skladu z relativistiko.

Za skupinsko hitrost  $v_g$  obstaja še preprostejša razlaga. Ravninski val  $\vec{k}_1$  zadene ob kovinsko steno in se pri odboju pretvori v ravninski val

$\vec{k}_2$ . Slednji zadene ob drugo kovinsko steno in se tam pretvori nazaj v izvorni val  $\vec{k}_1$ . V pravokotnem valovodu torej elektromagnetno valovanje cikcaka med kovinskima stenama. Projekcija svetlobne hitrosti  $c_0$  na os  $z$  valov  $\vec{k}_1$  ali  $\vec{k}_2$  je natančno skupinska hitrost  $v_g$ .

Tik ob mejni frekvenci  $f \approx f_{0m}$  opazovanega rodu je cikcak zelo gost in gre  $v_g \rightarrow 0$  proti nič. Večina elektromagnetnega polja v votlovodu daje energijo stojnega vala, moč napredujočega vala pa je razmeroma majhna. Z višanjem frekvence se cikcak redči. Energija stojnega vala se z višanjem frekvence niža, kar opisuje člen  $k_y/k$  jalove komponente gostote pretoka moči  $\text{Im}[\vec{S}]$ . Moč napredujočega vala se z višanjem frekvence večja, kar opisuje člen  $\beta/k$  delovne komponente gostote pretoka moči  $\text{Re}[\vec{S}]$ .

Pravokotni kovinski valovod želimo uporabiti v praktičnih napravah, elektronskih vezjih in antenah. Tako sodobna polprevodniška elektronska vezja kot antene delajo z razmeroma nizkimi impedancami v velikostnem razredu  $Z_K \approx 50 \Omega$  impedance običajnega koaksialnega kabla. Pravokotni kovinski valovod deluje z višjimi impedancami in potrebuje primeren transformator.

Strogo gledano električna napetost  $U$  sploh ne obstaja v kovinskem votlovodu, saj je vrtnčenje električne poljske jakosti  $\text{rot } \vec{E} \neq 0$  različno od nič! Ploskovni tok  $\vec{K}$  v stenah lahko sicer "seštejemo" v tok  $I$ , če je to sploh smiselno? Karakteristične impedance pravokotnega votlovoda žal ne moremo definirati kot  $Z_K = U/I$ .

Kot merilo za impedanco votlovoda se pogosto navaja razmerje prečnih komponent polja  $Z = E_{\text{prečni}}/H_{\text{prečni}}$ , torej valovna impedanca. Slednje je sicer pravilno definirano, a je v električnih vezjih neuporabno. V takšni definiciji impedanca osnovnega rodu  $\text{TE}_{01}$  sploh ni odvisna od ožje stranice  $a$  pravokotne kovinske cevi.

Bolj uporabna je sicer zelo groba razlaga delovanja pravokotnega kovinskega valovoda kot osrednjega trakastega dvovoda, ki ima ob straneh še kovinske opornice. Slednje izberemo dolžine  $\lambda_0/4$ , da kratek stik ožje stranice valovoda preslikajo v odprte sponke ob osrednjem trakastem dvovodu:



Pravokotna kovinska cev je na enem koncu kratkosklenjena. Če je razdalja med kondenzatorjem  $C_T$  in kratkostičnikom  $d < \lambda_g/4$  manjša od četrte valovodne valovne dolžine, se kratek stik preslika v induktivnost  $L_T$  na priključku kondenzatorja  $C_T$ . Natančno vrednost induktivnosti  $L_T$  seveda izbiramo s položajem kovinske stene (kratkostičnika) oziroma z nastavljanjem razdalje  $d$ .

Drugi konec kovinske cevi se nadaljuje v pravokotni valovod poljubne dolžine. Slednji se lahko zaključi s ponovnim transformatorjem nazaj na koaksialni kabel oziroma z odprtino. Odprtina na koncu valovoda sploh ne predstavlja odprtih sponk. Prečne izmere votlovoda so primerljive z valovno dolžino, zato se takšna odprtina obnaša kot učinkovita antena, imenovana tudi valovodni lijak.

Opisani transformator iz koaksialnega kabla na pravokotni kovinski valovod je seveda uporaben le pri tistih frekvencah, ko v pravokotni cevi lahko potuje le osnovni rod  $TE_{01}$  z najnižjo mejno frekvenco  $f_c = f_{01}$ . Z višanjem frekvence se v kovinski cevi pravokotnega prereza lahko širi čedalje več rodov. Rodove označimo z dvema indeksoma  $n$  in  $m$ , ki pomenita število hrbtov stojnega vala v (prečnih) smereh  $x$  in  $y$ . V pravokotnem valovodu sta kartezični koordinati  $x$  in  $y$  oziroma indeksa  $n$  in  $m$  med sabo enakovredna ter ju lahko med sabo zamenjamo.

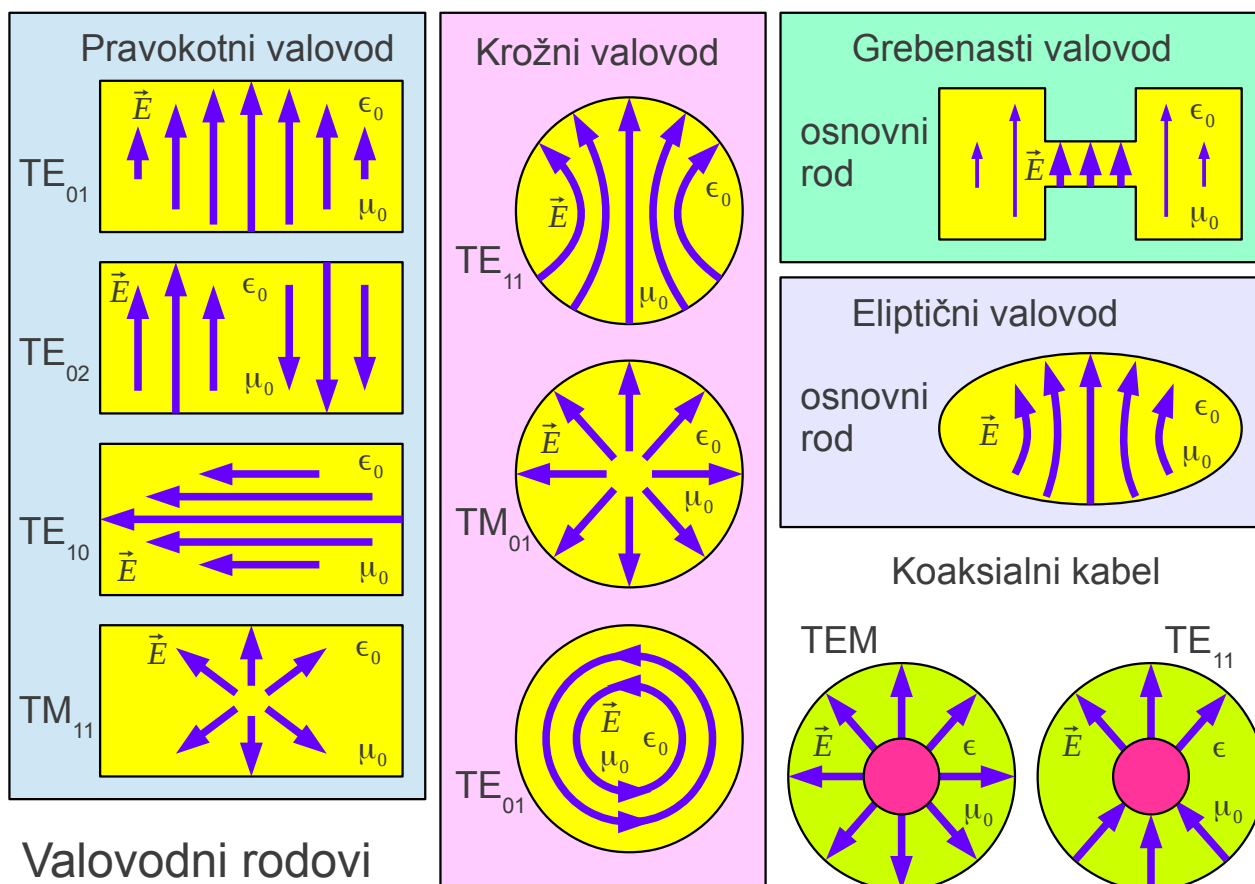
Rodovi v pravokotni kovinski cevi imajo tudi vzdolžno komponento polja v smeri osi  $z$ . Rodove, ki imajo od nič različno  $H_z \neq 0$  vzdolžno magnetno polje, imenujemo transverzalno električni rodovi  $TE_{nm}$  (ameriška oznaka) oziroma rodovi  $H_{nm}$  (nemška oznaka). Rodove, ki imajo od nič različno  $E_z \neq 0$  vzdolžno električno polje, imenujemo transverzalno magnetni rodovi  $TM_{nm}$  (ameriška oznaka) oziroma rodovi  $E_{nm}$  (nemška oznaka).

Posamezni rodovi so popolnoma neodvisni med sabo. Vsak rod ima svojo neodvisno energijo stojnega vala  $W_{nm}$ , prenaša svojo neodvisno delovno moč  $P_{nm}$ , svojo neodvisno informacijo in ima svojo neodvisno fazno konstanto  $\beta_{nm}$ . Dva sicer različna rodova lahko imata popolnoma enaki fazni konstanti. Takšnima dvema rodovoma pravimo, da sta izrojena (angleško: degenerated), ker ju zaradi enakih faznih konstant zelo težko ločimo med sabo.

Pri praktični uporabi valovoda (običajno) želimo, da valovod prenaša en sam rod valovanja. Če valovod lahko prenaša več različnih rodov, pride zaradi mehanskih odstopanj (toleranc) kovinske cevi do sklopa med različnimi

rodovi. Sklop med različnimi rodovi pomeni potovanje signala po različno dolgih poteh in pripadajoče popačenje. V bližini mejnih frekvenc  $f_{nm}$  posameznih rodov se lahko izredno poveča slabljenje. Višji valovodni rodovi povzročijo tudi odklon glavnega snopa in popačenje smernega diagrama antene, valovodnega lijaka.

V opisu polja osnovnega rodu  $TE_{01}$  pravokotnega kovinskega valovoda krajša stranica  $a$  pravokotne cevi sploh ne nastopa. Majhen  $a$  sicer pomeni večje izgube zaradi električne upornosti kovinskih sten, večji  $a$  pa pojav rodov s stojnim valom v smeri  $x$ . Razmerje stranic pravokotne cevi običajno izberemo  $b=2a$ , da mejna frekvenca rodu  $TE_{10}$  s stojnim valom v smeri  $x$  sovpada  $f_{10}=f_{02}$  z mejno frekvenco naslednjega višjega rodu  $TE_{02}$  s stojnim valom v smeri  $y$ :



Opisana izbira razmerja stranic  $b=2a$  omogoča frekvenčni pas enorodovnega delovanja pravokotnega kovinskega votlovoda v razponu  $f_{max}:f_{min}=2:1$ . Uporaben frekvenčni pas pravokotnega valovoda je ožji, približno  $f_{max}:f_{min}\approx 1.5:1$ . V praksi se izogibljemo predvsem spodnji frekvenčni meji osnovnega rodu ( $\sim 30\%$ ), kjer sta slabljenje zaradi velike jalove energije gostega cikcaka in popačenje zaradi spreminjanja  $\beta(\omega)$  zelo visoka. Gornji frekvenčni meji se lahko približamo na  $\sim 5\%$ , da ne

vzbudimo višjih rodov zaradi mehanskih toleranc cevi oziroma krivin.

Na primer, sprejemnik za satelitsko TV v frekvenčnem pasu 12 GHz uporablja standardizirani valovod WR75 (ali WG17 ali R120) kot vhodni priključek. Valovod WR75 je namenjen delovanju v frekvenčnem pasu 10 GHz ... 15 GHz. Notranje izmere  $a=0.375''(\text{cole})\approx 9.5\text{ mm}$  in  $b=0.75''(\text{cole})\approx 19\text{ mm}$  določajo frekvenčno mejo osnovnega rodu  $f_{01}=7.87\text{ GHz}$  in frekvenčno mejo višjih rodov  $f_{02}=f_{10}=15.74\text{ GHz}$ .

Širši frekvenčni pas omogoča drugačen presek kovinske cevi. Grebenasti valovod (angleško: ridge waveguide) je v osrednjem delu skrčen z ene ali z obeh strani (angleško: double-ridge waveguide), da je karakteristična impedanca  $Z_K$  trakastega dvovoda nižja. Višja kapacitivnost trakastega dvovoda znižuje frekvenčno mejo  $f_{01}$  osnovnega rodu in hkrati nima večjega učinka na mejne frekvence  $f_{nm}$  višjih rodov.

Uporaben frekvenčni pas grebenastega valovoda na ta način dosega  $f_{\max}:f_{\min}=3:1$  in več. Omejitev predstavlja povečano slabljenje zaradi nižje karakteristične impedance  $Z_K$  osrednjega trakastega dvovoda. Nižja karakteristična impedanca  $Z_K$  grebenastega valovoda sicer omogoča preprostejšo transformacijo na koaksialni kabel z  $Z_K=50\ \Omega$ .

Kot votli kovinski valovod lahko sicer uporabimo kovinsko cev poljubnega prereza, kar je izpeljal že Lord Rayleigh leta 1897. Elektromagnetni obravnavi najrazličnejših valovodov najrazličnejših prerezov je skupna preprosta vzdolžna koordinata  $z$ . Slednja ima mersko enoto meter  $[\text{m}]$ , preprost Laméjev koeficient  $h_z=1$  in konstanten smernik  $\vec{1}_z=\text{konst.}$

Za rešitev elektromagnetne naloge v dolgi kovinski cevi poljubnega, ampak nespremenljivega prereza zadošča, da rešimo valovni enačbi za električno in magnetno polje v votli notranjosti cevi samo za preprosti skalarni valovni enačbi vzdolžnih komponent:

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0 \quad \text{in} \quad \Delta H_z + k^2 H_z = 0$$

Manjkajoče prečne komponente električnega in magnetnega polja nato izračunamo iz vzdolžnih komponent s pomočjo Maxwellovih enačb, bolj točno s pomočjo Ampèrejevega in Faradayevega zakona v diferencialni obliki. Račun nam dodatno poenostavi iskanje rešitve v obliki napredujočega vala v vzdolžni smeri  $z$ , kar pomeni odvisnost  $e^{-j\beta z}$  in preprosto odvajanje po

vzdolžni koordinati  $\partial/\partial z = -j\beta$ .

Na primer, votlo kovinsko cev krožnega prereza s polmerom  $a$  uporabimo kot valovod. Pripadajočo elektromagnetno nalogo rešujemo v valjnih koordinatah  $(\rho, \phi, z)$ . Potujoči val v vzdolžni smeri  $z$  opisujeta rešitvi valovnih enačb vzdolžnih komponent:

$$E_z(\rho, \phi, z) = J_m(\rho \sqrt{k^2 - \beta^2}) [A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi] e^{-j\beta z}$$

$$H_z(\rho, \phi, z) = J_m(\rho \sqrt{k^2 - \beta^2}) [C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi] e^{-j\beta z}$$

Ker v osi votle cevi ne pričakujemo singularnosti, zadošča v obeh rešitvah ena sama Besselova funkcija  $J_m(\rho \sqrt{k^2 - \beta^2})$ . Indeks

$m=0,1,2,3,4,5,\dots$  mora biti celo število.  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  in  $D_m$  so štiri poljubne konstante, ki določajo jakosti pripadajočih rodov za vsak indeks  $m$ .

Manjkajoče štiri prečne komponente v valjnih koordinatah  $E_\rho$ ,  $E_\phi$ ,  $H_\rho$  in  $H_\phi$  nato izračunamo iz vzdolžnih komponent  $E_z$  in  $H_z$  s pomočjo Ampèrejevega in Faradayevega zakona:

Valjne koordinate  $(\rho, \phi, z)$

Napredujoči val v smeri  $z$ :  $\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot } \vec{H}$$

Brez izvorov  $\vec{J}=0$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{1}_\rho & \rho \vec{1}_\phi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & -j\beta \\ H_\rho & \rho H_\phi & H_z \end{vmatrix}$$

$$E_\rho = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + j\beta H_\phi \right] \rightarrow E_\rho - \frac{\beta}{\omega\epsilon} H_\phi = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}$$

$$E_\phi = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[ -\frac{\partial H_z}{\partial \rho} - j\beta H_\rho \right] \rightarrow E_\phi + \frac{\beta}{\omega\epsilon} H_\rho = \frac{j}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \text{rot } \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{1}_\rho & \rho \vec{1}_\phi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & -j\beta \\ E_\rho & \rho E_\phi & E_z \end{vmatrix}$$

$$H_\rho = \frac{j}{\omega\mu} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + j\beta E_\phi \right] \rightarrow H_\rho + \frac{\beta}{\omega\mu} E_\phi = \frac{j}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi}$$

$$H_\phi = \frac{j}{\omega\mu} \left[ -\frac{\partial E_z}{\partial \rho} - j\beta E_\rho \right] \rightarrow H_\phi - \frac{\beta}{\omega\mu} E_\rho = \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}$$

$$\omega^2 \mu \epsilon = k^2$$

$$E_\rho = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[ \beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\omega\mu}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right]$$

$$H_\rho = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[ -\frac{\omega\epsilon}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right]$$

$$E_\phi = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[ \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right]$$

$$H_\phi = \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left[ \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right]$$

Prečne komponente polja iz vzdolžnih

Iz vzdolžne komponente magnetnega polja  $H_z$  dobimo transverzalno električne rodove  $TE_{mn}$  ( $H_{mn}$ ). Iz vzdolžne komponente električnega polja  $E_z$  dobimo transverzalno magnetne rodove  $TM_{mn}$  ( $E_{mn}$ ). V valjnih koordinatah  $(\rho, \phi, z)$  je seveda pomen indeksov drugačen kot v kartezičnih koordinatah  $(x, y, z)$  pravokotnega votlovoda! Prvi indeks  $m$  šteje hrbte stojnega vala v smeri koordinate  $\phi$ , drugi indeks  $n$  pa šteje hrbte stojnega vala v smeri koordinate  $\rho$ .

Rodove  $TE_{mn}$  in  $TM_{mn}$  poiščemo iz prestopnih pogojev. Tangencialna komponenta električne poljske jakosti  $\vec{E}_t(\rho=a, \phi, z)=0$  mora biti nič povsod na notranji steni cevi s polmerom  $\rho=a$ . Rodove  $TE_{mn}$  poiščemo iz pogoja, kjer ničlam odvodov ustrezajo maksimumi in minimumi Besselovih funkcij:

$$E_\phi(\rho=a)=0 \rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial \rho}=0 \rightarrow J'_m(a\sqrt{k^2-\beta^2})=0$$

Rodove  $TM_{mn}$  poiščemo iz pogoja za ničle Besselovih funkcij:

$$E_z(\rho=a)=0 \rightarrow J_m(a\sqrt{k^2-\beta^2})=0$$

Najpomembnejši podatek so mejne frekvence  $\omega_{mn}$  oziroma  $f_{mn}$  posameznih rodov, iz katerih lahko izračunamo fazne konstante  $\beta_{mn}$  oziroma valovodne valovne dolžine  $\lambda_{gmn}$  pri poljubni frekvenci.

$$\text{Rodovi } TE_{mn} : J'_m(k_{mn}a)=0 \text{ ali } J'_m\left(\frac{\omega_{mn}}{c_0}a\right)=0 \text{ ali } J'_m\left(\frac{2\pi f_{mn}}{c_0}a\right)=0$$

$$\text{Rodovi } TM_{mn} : J_m(k_{mn}a)=0 \text{ ali } J_m\left(\frac{\omega_{mn}}{c_0}a\right)=0 \text{ ali } J_m\left(\frac{2\pi f_{mn}}{c_0}a\right)=0$$

Prva značilna točka Besselovih funkcij je maksimum  $J_1$  oziroma ničla odvoda  $J'_1(1.8412)=0$  (glej risbo Besselovih funkcij v poglavju 14. Votlinski rezonator). Osnovni rod v valovodu krožnega prereza je torej  $TE_{11}$  z mejno frekvenco:

$$f_{TE11} = \frac{1.8412 c_0}{2 \pi a}$$

Rod  $TE_{11}$  v valovodu krožnega prereza je dvakrat izrojen, saj neodvisni konstanti  $C_1$  in  $D_1$  dajeta dva neodvisna rodova z enako fazno konstanto  $\beta_{TE11}$  a različno smerjo električnega polja  $\vec{E}$  oziroma različno polarizacijo.

Naslednja značilna točka je ničla  $J_0(2.4049)=0$ , ki ustreza rodu  $TM_{01}$  v valovodu krožnega prereza z mejno frekvenco:

$$f_{TM01} = \frac{2.4049 c_0}{2 \pi a}$$

Rod  $TM_{01}$  v valovodu krožnega prereza ni izrojen, saj je smiselna edino konstanta  $A_0$ . Obstaja ena sama različica rodu  $TM_{01}$  s fazno konstanto  $\beta_{TM01}$  in rotacijsko simetrično sliko elektromagnetnega polja.

Posebnost predstavlja rotacijsko simetrični rod  $TE_{01}$  v valovodu krožnega prereza z mejno frekvenco:

$$f_{TE01} = \frac{3.8318 c_0}{2 \pi a}$$

Za razliko od večine ostalih rodov ima  $TE_{01}$  samo jalove tokove  $\text{Im}[\vec{K}]$  v steni kovinske cevi. Ker jakost jalovih tokov upada s frekvenco, slabljenje rodu  $TE_{01}$  zaradi končno velike prevodnosti stene prav tako upada s frekvenco. Pri zelo visokih frekvencah ima  $TE_{01}$  od vseh rodov najnižje slabljenje in z višanjem frekvence gre slabljenje celo proti nič!

Žal ima  $TE_{01}$  razmeroma visoko mejno frekvenco, ga je težko vzbuditi in je težko preprečiti sklop z rodovi nižjih redov zaradi majhnih mehanskih odstopanj oblike cevi. Nižjo ali enako mejno frekvenco ima kar sedem različnih rodov:  $TE_{11}$  (dvakrat izrojen),  $TM_{01}$ ,  $TE_{21}$  (dvakrat izrojen) in  $TM_{11}$  (dvakrat izrojen).

Votlovod krožnega prereza najpogosteje uporabljamo na osnovnem rodu  $TE_{11}$ . Obe izrojeni inačici slednjega ustrezata rodovima  $TE_{01}$  in  $TE_{10}$  v votlovodu kvadratnega prereza. Izrojenost v votlovodu kvadratnega

prereza preprečimo z izbiro različnih stranic  $a \neq b$  pravokotnega votlovida. Izrojenost v votlovodu krožnega prereza preprečimo tako, da krožno cev sploščimo v eliptično cev.

Eliptični valovod omogoča podoben frekvenčni pas enorodovnega delovanja  $f_{\max} : f_{\min}$  kot pravokotni valovod. Eliptični valovod je sicer ugodnejši za vgradnjo, lahko ga polagamo kot debelejši koaksialni kabel. Reševanje valovne enačbe v valjnih eliptičnih koordinatah  $(u, v, z)$  je zahtevna matematična naloga.

Večje število valovodnih rodov dobimo tudi takrat, ko si tega ne pričakujemo niti ne želimo. Na primer, koaksialni kabel običajno uporabljamo na osnovnem rodu TEM, ki lahko vodi tudi pri  $f=0$  (enosmerno). Pri dovolj visoki frekvenci tudi v koaksialnem kablu nastopijo višji rodovi. Najnižjo mejno frekvenco ima rod TE<sub>11</sub>, podoben enakovrednemu rodu v krožnem votlovodu.

Koaksialni kabel ni votel. Poleg oklopa, cevi krožnega prereza, vsebuje vsaj še žilo v sredini. Prostor med žilo in oklopom je izpolnjen z dielektrikom  $\epsilon_r > 1$ . Oboje, žila in dielektrik, znižujeta mejno frekvenco prvega višjega rodu TE<sub>11</sub>. Že majhna ekscentričnost žile povzroči sklop med rodovima TEM in TE<sub>11</sub>, kar pomeni zelo visoko slabljenje v bližini mejne frekvence rodu TE<sub>11</sub> ter pripadajoče popačenje signala.

Uporaben približek za mejno frekvenco rodu TE<sub>11</sub> v koaksialnem kablu z žilo polmera  $a$ , oklopom notranjega polmera  $b$  in dielektrikom  $\epsilon_r$  med žilo in oklopom, je naslednji:

$$f_{TE11} \approx \frac{c_0 / \sqrt{\epsilon_r}}{\pi(a+b)}$$

Približek povsem točno velja v primeru, ko polmer žile  $a \rightarrow b$  skoraj doseže polmer oklopa. Ko postaja žila zelo tanka  $a \rightarrow 0$ , daje približek nekoliko previsok rezultat v primerjavi s točnim izrazom za rod TE<sub>11</sub> v cevi krožnega prereza polmera  $b$  brez osrednje žile, ampak zapolnjene z dielektrikom  $\epsilon_r$ :

$$f_{TE11} \approx \frac{1.8412 c_0 / \sqrt{\epsilon_r}}{2\pi b}$$

Kot zgled si oglejmo koaksialni kabel UT141, na osnovi katerega so načrtovane vtičnice in vtičaki družine SMA. Oznaka kabla pomeni premer

oklopa  $2b = 0.141'' (\text{cole}) \approx 3.6 \text{ mm}$  . Pri dielektričnosti  $\epsilon_r \approx 2$  in karakteristični impedanci  $Z_K = 50 \Omega$  znaša premer žile  $2a \approx 1.1 \text{ mm}$  . Približek daje mejno frekvenco enorodovnega delovanja  $f_{TE11} \approx 28.7 \text{ GHz}$  . Delovanje vtičnic in vtikačev družine SMA je zato zajamčeno vse do frekvence  $f_{max} = 26.5 \text{ GHz}$  .

Poleg koaksialnega kabla in votlih kovinskih cevi (votlovodov) uporabljamo še številne druge vrste elektromagnetnih valovodov. Danes so najpomembnejši dielektrični valovodi v obliki svetlobnih vlaken. Delovanje slednjih je podobno kovinskim valovodom. Svetlobna vlakna pri tem izkoriščajo popolni odboj elektromagnetnega valovanja na meji dveh različnih dielektrikov namesto odboja na površini kovine. Valovod brez kovin omogoča za več velikostnih razredov nižje slabljenje.

Zaradi izjemnega pomena v telekomunikacijah je svetlobnim vlaknom dodeljen poseben predmet z imenom "Optične komunikacije". V sklopu predmeta "Elektrodinamika" opišemo le osnovna dogajanja v kakršnemkoli valovodu, razjasnimo osnovne pojme kot so fazna hitrost in skupinska hitrost ter postopek reševanja valovne enačbe v kakršnemkoli valovodu okroglega prereza. Vse omenjeno seveda potrebujemo v zahtevnejši obravnavi svetlobnih vlaken.

\* \* \* \* \*