

9. Vektorski potencial

Reševanje preproste elektrotehnične naloge: kakšni sta polji $\vec{E}(\vec{r})$ oziroma $\vec{H}(\vec{r})$, če poznamo izvore, torej vse tokove $\vec{J}(\vec{r})$ in vse elektrine $\rho(\vec{r})$, vodi v dve komplicirani, vektorski diferencialni valovni enačbi drugega reda. Kompliciran račun skušamo poenostaviti z uvedbo novih vmesnih spremenljivk, ki jih imenujemo potenciali.

Račun je najpreprostejši v elektrostatiki $\partial/\partial t=0$ oziroma $\omega=0$. Takrat je vrtnčenje električnega polja zagotovo enako nič $\text{rot } \vec{E}(\vec{r})=0$. Če je vrtnčenje vektorskega polja enako nič, lahko takšno polje zapišemo kot smerni odvod neke skalarne veličine. Izbrano skalarno funkcijo $V(\vec{r})$ imenujemo kar potencial v elektrostatiki:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow \text{div}(\text{grad } V) = \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Žal sta takšen potencial $V(\vec{r})$ in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna v elektrodinamiki, kjer velja $\omega \neq 0$ oziroma $\text{rot } \vec{E} \neq 0$.

Podoben skalarni potencial $V_m(\vec{r})$ lahko uvedemo v magnetostatiki. $\text{rot } \vec{H}(\vec{r})=0$ zahteva statiko $\partial/\partial t=0$ oziroma $\omega=0$ in hkrati še odsotnost tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ vsaj v tistem delu prostora, kjer uporabljamo $V_m(\vec{r})$. Skalarni magnetni potencial $V_m(\vec{r})$ tedaj določa enačba:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad } V_m(\vec{r})$$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \rightarrow \text{div}(\text{grad } V_m) = \Delta V_m = 0$$

Žal sta takšen potencial $V_m(\vec{r})$ in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna tam, kjer je $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$ oziroma v elektrodinamiki, kjer velja $\omega \neq 0$ oziroma $j\omega \vec{D} \neq 0$.

Gostota električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ je vektorska veličina. Njenega učinka zato ne moremo opisati z neko vmesno skalarno funkcijo, saj skalarna

funkcija vsebuje trikrat manj podatkov od vektorske funkcije. Smiselna izbira bo v tem primeru neka vmesna vektorska veličina. Vektorski potencial

$\vec{A}(\vec{r})$ je definirali že James Clerk Maxwell kot:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad \text{oziroma} \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$$

Nova veličina vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ ima merske enote $[\text{Vs/m}]$. Pripadajoče električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ dobimo iz Faradayevega zakona. Električnemu polju smemo dodati poljuben smerni odvod, na primer $-\text{grad } V(\vec{r})$, saj je vrtnčenje slednjega vedno enako nič:

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \text{rot } \vec{A} \rightarrow \text{rot}(\vec{E} + j\omega \vec{A}) = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \text{grad } V(\vec{r})$$

Polji $\vec{E}(\vec{r})$ in $\vec{H}(\vec{r})$ torej računamo preko vmesnih spremenljivk, vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in skalarne potenciala $V(\vec{r})$ v poljubni nalogi elektrodinamike, kjer velja $\omega \neq 0$, $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$ oziroma $\rho(\vec{r}) \neq 0$. Pri tem smo skalarni potencial $V(\vec{r})$ izbrali tako, da je čim bolj podoben tistemu iz elektrostatike. Za oba potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ moramo seveda poiskati točne valovne enačbe v elektrodinamiki.

Valovno enačbo za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ dobimo iz Ampèrejevega zakona:

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J} + j\omega \epsilon \vec{E} = \vec{J} + \omega^2 \epsilon \vec{A} - j\omega \epsilon \text{grad } V$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{A} = -\mu \vec{J} + \text{grad}(j\omega \mu \epsilon V + \text{div } \vec{A})$$

V vsem dosedanjem izvajanju je bilo določeno samo vrtnčenje vektorskega potenciala $\text{rot } \vec{A}$. Izvornost vektorskega potenciala $\text{div } \vec{A}$ je zaenkrat poljubna, saj je popolnoma neodvisna od vrtnčenja.

Izvornost vektorskega potenciala $\text{div } \vec{A}$ lahko izberemo na različne načine. Najbolj preprosta je Columbova izbira $\text{div } \vec{A} = 0$ (angleško: Columb gauge). Valovno enačbo za vektorski potencial najbolj poenostavi Lorentzova

izbira $j\omega\mu\epsilon V + \text{div } \vec{A} = 0$ (angleško: Lorentz gauge):

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) + \omega^2\mu\epsilon \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$$

Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ je tedaj odvisen samo od gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ in ni odvisen od prostorske elektrine $\rho(\vec{r})$. Iz Gaussovega zakona dobimo še valovno enačbo za skalarni potencial $V(\vec{r})$:

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon} = \text{div}(-j\omega \vec{A} - \text{grad } V) = -\omega^2\mu\epsilon V - \Delta V$$

$$\Delta V(\vec{r}) + \omega^2\mu\epsilon V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Skalarni potencial $V(\vec{r})$ je z Lorentzovo izbiro odvisen samo od prostorske elektrine $\rho(\vec{r})$ in ni odvisen od gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$. Čeprav ima skalarni potencial $V(\vec{r})$ merske enote volti [V], ni neposredno povezan z električno napetostjo U , saj je slednja lahko definirana na različne načine oziroma v marsikateri nalogi elektrodinamike sploh ne obstaja.

Lorentzova izbira omogoča, da lepo ločimo učinka elektrine $\rho(\vec{r})$ in toka $\vec{J}(\vec{r})$. Elektrina $\rho(\vec{r})$ je skalarna veličina in poganja skalarni potencial $V(\vec{r})$. Tok $\vec{J}(\vec{r})$ je vektorska veličina in poganja vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$. Pri tem ne smemo pozabiti, da sta tok $\vec{J}(\vec{r})$ in elektrina $\rho(\vec{r})$ povezana z zahtevo za zveznost $j\omega\rho(\vec{r}) + \text{div } \vec{J}(\vec{r}) = 0$.

Konstanta $\omega^2\mu\epsilon$ nastopa v vseh valovnih enačbah za $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ oziroma $V(\vec{r})$. Konstanto lahko izrazimo na različne načine vključno s hitrostjo valovanja $v[\text{m/s}]$:

$$\omega^2\mu\epsilon = \frac{\omega^2}{v^2} = k^2 \rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \equiv \text{valovno število} \left[\frac{\text{rd}}{\text{m}} \right]$$

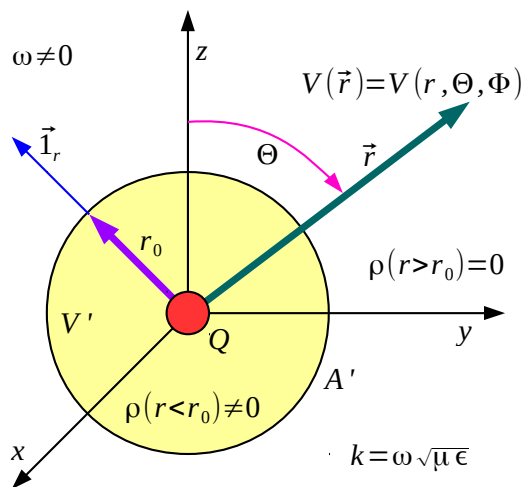
Valovno število k pove, kako hitro se faza spreminja z razdaljo v prostoru. V praznem prostoru seveda velja $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $k = k_0$ in $v = c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Z valovnim številom k obe valovni enačbi za potenciala preprosto zapišemo v frekvenčnem prostoru:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) + k^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$$

$$\Delta V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Najprej poskusimo poiskati rešitev za skalarno enačbo za $V(\vec{r})$, saj je preprostejša od vektorske enačbe za $\vec{A}(\vec{r})$. Najbolj preprost primer je ena sama točkasta elektrina Q v koordinatnem izhodišču. Takšna elektrina predstavlja singularnost, zato jo omejimo s kroglico s polmerom r_0 :

Točkasta elektrina



Zunaj kroglice $\rho(r>r_0)=0 \rightarrow \Delta V+k^2 V=0$

Ugibamo rešitev $V(r, \Theta, \Phi) = \frac{C}{r} e^{-jkr}$

$$\text{grad}V = \vec{1}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C}{r} e^{-jkr} \right) = -\vec{1}_r C \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{-jkr}$$

$$\Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 (-C) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{-jkr} \right)$$

$$\Delta V = -\frac{C}{r^2} (jk e^{-jkr} + (1 + jkr)(-jk) e^{-jkr}) = -k^2 V$$

$$\Delta V + k^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \leftarrow \iiint_{V'} dV'$$

$$\iiint_{V'} \Delta V dV' + \iiint_{V'} k^2 V dV' = \iiint_{V'} -\frac{\rho}{\epsilon} dV' = -\frac{Q}{\epsilon}$$

$$\iiint_{V'} \Delta V dV' = \iiint_{V'} \operatorname{div}(\operatorname{grad} V) dV' = \oint_{A'} \operatorname{grad} V \cdot \vec{1}_r dA' = \operatorname{grad} V \cdot \vec{1}_r 4\pi r_0^2 = -4\pi C(1+jkr_0)e^{-jkr_0}$$

$$r_0 \rightarrow 0 \quad -4\pi C(1+jkr)e^{-jkr} \rightarrow -4\pi C \quad -4\pi C = -\frac{Q}{\epsilon}$$

$$\iiint_{V'} k^2 V dV' = \int_0^{r_0} k^2 \frac{C}{r} e^{-jkr} 4\pi r^2 dr \rightarrow 0$$

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon}$$

$$V(r, \Theta, \Phi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr}$$

Zunaj kroglice $r > r_0$ ni elektrin niti singularnosti. Zunaj kroglice rešujemo poenostavljeno valovno enačbo brez izvorov. Rešitev za

$V(\vec{r}) = V(r, \Theta, \Phi)$ ugibamo v krogelnih koordinatah. V elektrostatiki je potencial točkaste elektrine točno obratno sorazmeren razdalji $1/r$. V elektrodinamiki sklepamo, da bo potencial $V(\vec{r}, t)$ zakasnjen učinek elektrine $Q(t') = Q(t - r/v)$. V frekvenčnem prostoru pomeni opisana zakasnitev fazni zasuk $\varphi = -kr$, kjer minus pomeni zaostajanje faze.

Diferencialna enačba drugega reda zahteva dve neodvisni rešitvi, v opisanem primeru s členoma e^{+jkr} in e^{-jkr} . Člen e^{+jkr} fizikalno ni smisel, ker je potencial $V(\vec{r})$ posledica elektrine Q , torej sme biti kvečjemu zakasnen. Fizikalno torej zadošča rešitev e^{-jkr} in ena sama

pripadajoča konstanta C .

V notranjosti kroglice $r < r_0$ smemo poskusiti z enako rešitvijo za potencial $V(\vec{r})$, čeprav elektrina $\rho(\vec{r})$ tam ne bo prav povsod enaka nič. Česar v notranjosti kroglice ne znamo narediti, v singularnosti v koordinatnem izhodišču ne znamo izračunati diferencialnih operacij $\text{grad } V$ niti ΔV . Valovno enačbo zato integriramo po celotni prostornini V' kroglice.

Izračun ΔV v singularnosti v koordinatnem izhodišču zaobidemo tako, da integral po prostornini V' kroglice pretvorimo s pomočjo Gaussovega izreka v integral po površini kroglice A' , kjer ni singularnosti in znamo izračunati $\text{grad } V$. Sam potencial V smemo integrirati po celotni prostornini kroglice singularnosti navkljub, saj je vrednost integrala omejena in gre proti nič, če kroglico manjšamo v nič $r_0 \rightarrow 0$.

V opisani nalogi opazimo, da nam primanjkuje različnih črk! Črko V uporabljamo tako za potencial kot za prostornino kroglice, zato slednjo označimo z V' . Črko A uporabljamo tako za vektorski potencial \vec{A} kot za površino, zato slednjo označimo z A' . Končno, črko ρ uporabljamo tako za gostoto elektrine kot za valjno koordinato, ki v opisani nalogi na srečo ne nastopa.

Integracija desne strani valovne enačbe je preprosta, seštejemo vse elektrine znotraj kroglice. Za eno samo točkasto elektrino Q v koordinatnem izhodišču dobimo $-Q/\epsilon$. Z manjšanjem kroglice v nič $r_0 \rightarrow 0$ dobimo iskano konstanto $C = Q/(4\pi\epsilon)$. Rešitev valovne enačbe za skalarni potencial ene same točkaste elektrine Q v koordinatnem izhodišču se torej glasi:

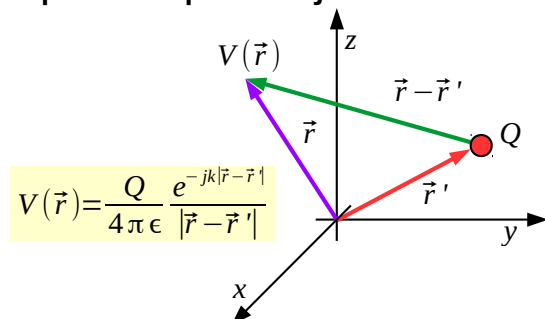
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr}$$

Opisano rešitev valovne enačbe lahko takoj posplošimo za elektrino Q na poljubnih koordinatah \vec{r}' tako, da prestavimo izhodišče koordinatnega sistema. Razdaljo r tedaj nadomesti izraz $|\vec{r} - \vec{r}'|$.

Ker je valovna enačba linearna, je vsota veljavnih rešitev prav tako rešitev iste enačbe. Izraz za potencial ene točkaste elektrine smemo torej razširiti na vsoto potencialov več točkastih elektrin $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ na pripadajočih koordinatah $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \dots$

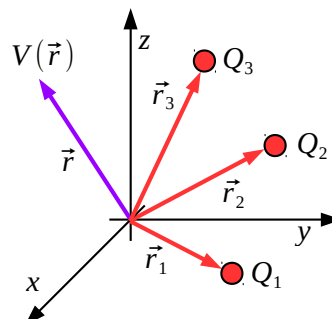
Končno lahko vsoto točkastih elektrin $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ prevedemo na integral prostorske elektrine $\rho(\vec{r}')$:

Splošen položaj elektrine



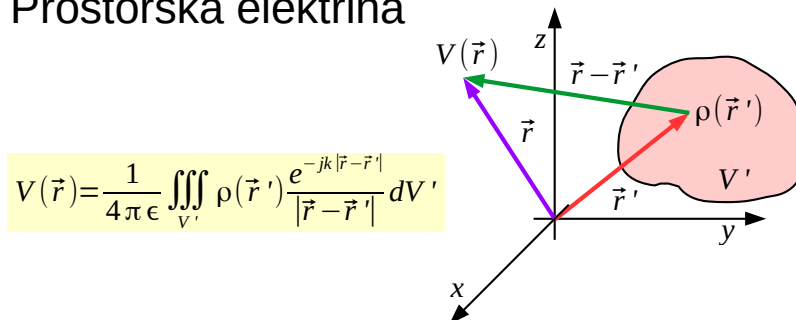
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Več elektrin



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i Q_i \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Prostorska elektrina



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Valovno enačbo za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ razstavimo na komponente v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z) . Konstantni smerni vektorji slednjega omogočajo preprosto razstavljanje vektorskega Laplace $\Delta \vec{A}(\vec{r})$. Dobimo tri skalarne valovne enačbe:

$$\Delta A_x(\vec{r}) + k^2 A_x(\vec{r}) = -\mu J_x(\vec{r})$$

$$\Delta A_y(\vec{r}) + k^2 A_y(\vec{r}) = -\mu J_y(\vec{r})$$

$$\Delta A_z(\vec{r}) + k^2 A_z(\vec{r}) = -\mu J_z(\vec{r})$$

Matematično povsem enakovredno skalarno valovno enačbo za $V(\vec{r})$ smo že rešili. Torej uporabimo isti postopek reševanja tudi za tri skalarne enačbe za komponente vektorskega potenciala $A_x(\vec{r})$, $A_y(\vec{r})$ in $A_z(\vec{r})$. Dobimo tri obrazce za izračun komponent:

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} J_x(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} J_y(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} J_z(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Vse tri rešitve lahko preprosto združimo v vektorski zapis, ki velja v poljubnem, tudi krivočrtnem koordinatnem sistemu:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Končni obrazec za izračun vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ je torej silno podoben obrazcu za izračun skalarne potenciala $V(\vec{r})$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Oba gornja obrazca imata skupno ime obrazca za zakasnjena potenciala (angleško: retarded potentials). Ime zakasnjena potenciala izvira iz strogega upoštevanja zakasnitve učinka izvora v točki opazovanja potenciala, kar zahteva relativistika.

Med valovnimi enačbama za vektorski in skalarni potencial ter obrazcema za izračun vektorskega in skalarne potenciala je nekaj pomembnih razlik. Valovni enačbi veljata v poljubni točki prostora s koordinatami \vec{r} . Izvora $\vec{J}(\vec{r})$ in $\rho(\vec{r})$ imata iste koordinate kot potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ v valovnih enačbah. Rešitev diferencialne valovne enačbe ni samoumevna. Diferencialna enačba naleti na težave ob singularnostih.

Obrazca za izračun vektorskega in skalarne potenciala uporabljata dvojje različnih koordinat. Koordinate izvorov \vec{r}' so označene s črtico kot tudi pripadajoča prostornina V' in podobno. Koordinate izračunanih potencialov so označene brez črtic \vec{r} . Koordinate izvorov \vec{r}' so pri tem popolnoma neodvisne od koordinat potencialov \vec{r} . Pri odvajanju ali

integriranju moramo zato paziti, s katerimi koordinatami računamo: s položajem virov \vec{r}' ali s položajem učinkov (potencialov) \vec{r} ?

Integriranje je samoumevno seštevande učinkov več izvorov. Integriranje je zelo odporno na singularnosti. Integracijo gostote elektrine $\rho(\vec{r})$ zlahka prevedemo na vsoto točkastih elektrin Q_i . Prostorsko integracijo gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ zlahka prevedemo na enodimenzijsko integracijo vzdolž žice, ki vodi tok I .

Obrazca za zakasnjena potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ ne vsebujeta vrtinčenja. Do točnega električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ torej lahko pridemo v elektrodinamiki brez magnetnih veličin in brez pravila desnega vijaka! V obrazcu za izračun električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ iz potencialov $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \text{grad } V(\vec{r})$$

nastopajo samo še koordinate točke \vec{r} , kjer v isti točki prostora hkrati opazujemo potenciala in polje. Smerni odvod v gornjem obrazcu za $\vec{E}(\vec{r})$ torej računamo po koordinatah \vec{r} !

* * * * *