

1. Uvod v elektrodinamiko

Vse do 19. stoletja fizika ni poznala povezav med navidez različnimi električnimi pojavi, magnetnimi pojavi in svetlobo. André-Marie Ampère (1826) in Michael Faraday (1831) sta odkrila povezavi med električnimi in magnetnimi pojavi v obe smeri. James Clerk Maxwell (1861) je vse dotedanje znanje o elektriki in magnetiki združil v slovite enačbe, ki danes nosijo njegovo ime. Maxwell je iz svojih enačb napovedal tudi elektromagnetno valovanje oziroma povezavo med električnimi in magnetnimi pojavi ter svetlobo, kar je Heinrich Rudolf Hertz potrdil s poskusi leta 1889.

Z odkritjem novih pojavov so se pojavila tudi nova vprašanja. Kaj poganja električno polje? Kaj poganja magnetno polje? Po kakšni snovi potuje elektromagnetno valovanje? Delce, ki poganjajo polja in skrivnostno snov, poimenovano »eter«, po kateri potuje elektromagnetno valovanje, so iskali številni znanstveniki. Albert Abraham Michelson je v iskanju skrivnostne snovi napravil številne poskuse. Najbolj znan je njegov poskus z interferometrom iz leta 1887, ki je bil zadosti natančen, da je dokazal, da skrivnostni »eter« ne obstaja. Danes ta poskus velja kot najbolj znan »neuspeli« poskus v fiziki, ki je v resnici sprožil razvoj teorije relativnosti.

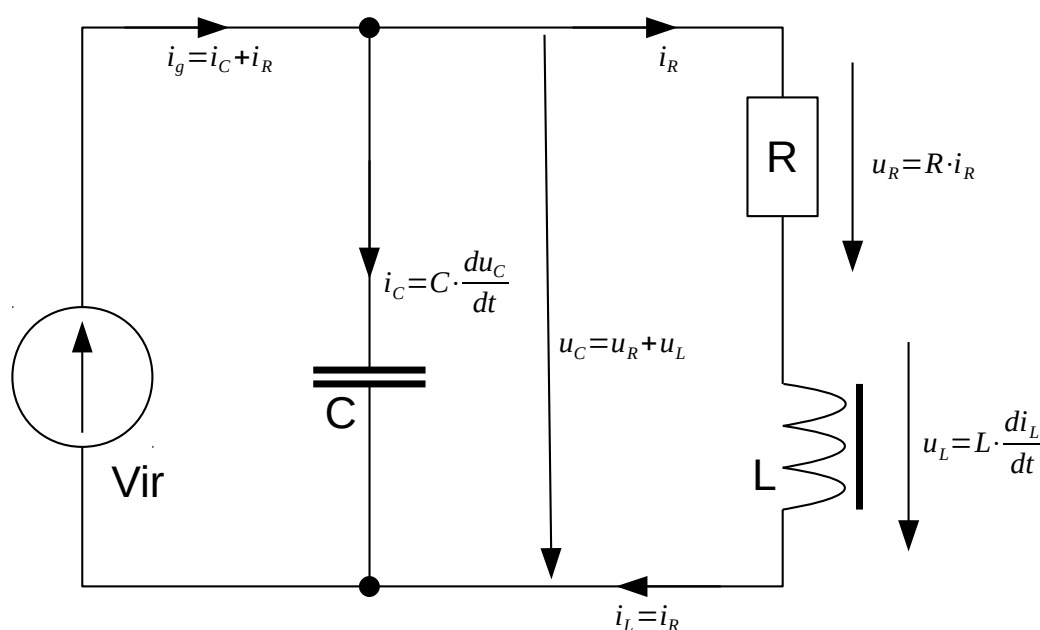
Dokončno je vse tri pojave razložil Albert Einstein v posebni teoriji relativnosti (1905). Električna sila je ena od štirih osnovnih fizikalnih sil, ki nastane med dvema elektrinama (električnima naboje) tudi v popolnoma praznem prostoru (vakuumu), je premo sorazmerna velikosti obeh nabojev in obratno sorazmerna razdalji. Relativistika z zahtevo po končni hitrosti svetlobe razloži še dva pojave. Enakomerno gibajoče elektrine ustvarjajo magnetno polje, kar nakazujejo že relativistični skrčki dolžin (Hendrik Lorentz 1892). Pospešene elektrine sevajo elektromagnetno valovanje. Podobne zakonitosti veljajo tudi za težnost, kjer mase nadomeščajo elektrine.

Inženirji elektrotehnike skušamo zahtevno relativistiko v primeru električne sile poenostaviti. Ko so pojavi počasni in razdalje majhne, so zakasnitve zaradi končne hitrosti svetlobe nepomembne. Opazimo le električne in magnetne pojave. Sevanje elektromagnetnega valovanja smemo tedaj zanemariti.

Ker je hitrost enakomernega gibanja elektron običajno zelo majhna v primerjavi s hitrostjo svetlobe, so magnetne sile zelo majhne v primerjavi z električnimi. Magnetne pojave opazimo samo zato, ker se velika večina

električnega polja premikajočih elektronov v prevodniku (gibljivi elektroni v kovini) odšteje od polja nepremičnih elektronov obratnega predznaka (kristalna mreža kovine). Magnetni pojavi so tista majhna sprememba polja enakomerno gibajočih elektronov, ki jo zahteva relativistika.

Počasni pojavi in majhne razdalje omogočajo opis poenostavljene naloge s koncentriranimi gradniki vezja: električne pojave skrčimo v kondenzator, magnetne pojave skrčimo v tuljavo itd. Izmere gradnikov in razdalje med njimi so v takšni poenostavljeni nalogi nepomembne. Končno nalogo rešujemo z načrtovanjem električnega vezja z znanimi gradniki:



Električno vezje je naloga z nič dimenzijami.

Električno vezje je v resnici naloga z nič dimenzijami, saj so izmere gradnikov in razdalje med njimi nepomembne. Povezave med napetostmi in tokovi v električnem vezju opisuje peščica preprostih enačb. Lep del elektrotehničnih nalog lahko opišemo in rešimo z električnimi vezji, kar predstavlja pomembno poenostavitev glede na izvirne Maxwellove enačbe.

Žal električna vezja niso povsod uporabna. Nekatere naloge zahtevajo za svoj opis neskončno število gradnikov. Nekaterih električnih nalog sploh ne moremo opisati z vezjem z nič dimenzijami. Na primer, kako opisati gretje črnega mačka na zimskem Soncu, kar je v vseh pogledih prava električna naloga?

Električno vezje nam ne zadošča v dveh primerih: ko so izmere naloge velike oziroma ko so pojavi hitri, torej je frekvenca izmeničnih električnih veličin zelo visoka. Z drugimi besedami, primerjati moramo izmere naprave z valovno dolžino elektromagnetnega valovanja.

Ko so izmere naprave zelo majhne v primerjavi z valovno dolžino, zadošča opis naprave z vezjem z nič dimenzijami. Ko so izmere naprave primerljive z valovno dolžino, potrebujemo drugačen pristop in s tem se ukvarja elektrodinamika. Končno, optika nam opisuje zelo velike naprave v primerjavi z valovno dolžino, kar je spet poenostavitev splošne elektrodinamike.

Kje potrebujemo zahtevnejši opis elektrodinamike? Pri načrtovanju elektronskega mikročipa zagotovo ne. Izmere čipa so majhne, tam so velika električna polja, torej gre vse v okviru elektrostatike. Tokovi v čipu so lahko veliki, ampak površine zank so majhne, magnetni pretoki so majhni in indukcijo lahko zanemarimo. Če mikročip ne vsebuje svetlobnih gradnikov (fotodiod, svetlečih diod oziroma polprevodniških laserjev), je sevanje elektromagnetnega valovanja zanemarljivo.

Zahtevnejši opis zagotovo potrebujemo v telekomunikacijah. Razdalje so velike, saj želimo komunikacije na velike razdalje. Visoko zmogljivost zveze omogoča edino velika pasovna širina, torej visoke frekvence. Elektrodinamika postane najprej pomembna prav s telegrafsko enačbo (Oliver Heaviside 1880). Mikročipi postajajo čedalje hitrejši, da že povezave med njimi zahtevajo poznavanje elektrodinamike. Kljub nizki frekvenci komaj 50Hz so postala danes elektroenergetska omrežja tako velika, da potrebujemo elektrodinamiko celo v energetiki.

Kako opisati elektrodinamiko na čimbolj preprost, ampak uporaben način, ki daje zadovoljivo natančnost rezultatov? Naloge z eno veliko izmero, to se pravi eno-dimenzijske naloge lahko opišemo s porazdeljenimi gradniki, torej z vezji z neskončnim številom gradnikov. Kljub izhodišču iz preprostih osnov elektrotehnike in izogibanju relativistiki, rešitve nalog takoj pokažejo na ključno veličino, to je hitrost svetlobe.

Tri-dimenzijske naloge potrebujejo zahtevnejši pristop. Elektrotehnikom so Maxwellove enačbe vsekakor preprostejše za razumevanje od zahtevne relativistike. Maxwellove enačbe je treba pretvoriti v diferencialno obliko, da postane naloga zadosti majhna, torej diferencialno majhna. V diferencialno majhni nalogi so zakasnitve diferencialno majhne, torej relativistika ne nagaja. Tu žal brez zahtevne matematike, diferencialne geometrije v različnih

tri-dimenzijskih koordinatnih sistemih v prostoru ne gre.

V elektrodinamiki lahko energija potuje tudi po povsem praznem prostoru. Gostoto pretoka moči nam opisuje Poyntingov vektor. Rešitev parcialne diferencialne valovne enačbe za električno oziroma magnetno polje ni preprosta. Pojav sevanja, ki je osnova brezvrvičnih zvez, najlažje izpeljemo z uvedbo nove vmesne veličine, vektorskega potenciala.

Točna obravnava ravninskega elektromagnetnega valovanja v elektrodinamiki nam preprosto opiše odboj, lom in tuneliranje valovanja na mejah različnih snovi. Vsota več različnih ravninskih valov nam omogoča opis novih naprav, kot sta kovinski valovod oziroma votlini resonator. Točna obravnava valovanja v izgubni snovi nam razloži kožni pojav v kovinah pri visokih frekvencah, ki spreminja porazdelitev toka po preseku kovinskega vodnika in povečuje izgube.

Ta učbenik skuša odgovoriti na izziv, kako poučevati elektrodinamiko na sodoben način, izpustiti manj pomembna področja in dodati vse tisto, kar uporablja sodobna telekomunikacijska tehnika. Kljub temu, da so izpeljave v tem učbeniku skržene na najmanjšo možno mero, elektrodinamika še vedno zahteva dobro poznavanje matematike in osnov elektrotehnike. Kjer je le možno, je poleg poštene a zahtevne rešitve Maxwellovih enačb navedena tudi preprosta razlaga pojavov s pojmi električnih vezij.

Elektrodinamika je osnova za razumevanje delovanja gradnikov terminalne opreme, sprejemnikov in oddajnikov ter vseh prenosnih poti v telekomunikacijah, tako brezvrvičnih radijskih in svetlobnih zvez kot vrvičnih zvez po kovinskih vodnikih in steklenih svetlobnih vlaknih.

* * * * *

2. Telegrafska enačba

Električni telegraf je plod dela številnih izumiteljev v prvi polovici 19. stoletja. Uporabnost telegrafa je neposredno vezana na njegov domet. V drugi polovici 19. stoletja so inženirji dosegli prekooceanske razdalje. Prvi prekooceanski kabel iz Evrope v Ameriko je bil položen že leta 1857. Žal je zaradi tehnološke nedovršenosti izolacije deloval le nekaj tednov. Tehnologija izolacije pa ni edina težava pri prekooceanskih razdaljah.

Na tako velikih razdaljah opazimo pojave elektrodinamike že pri zelo nizkih prenosnih hitrostih Morsejeve telegrafije z ročno oddajo in sprejemom na sluh, torej pri pasovni širini komaj 10Hz. Ohmska upornost žice ni edini niti najpomembnejši podatek telegrafskega kabla. Nadomestno vezje prenosne poti ni preprosto in takratni inženirji so prvo, eno-dimenzijsko nalogo elektrodinamike opisali z imenom telegrafska enačba.

Prenosni vodi ostajajo zelo pomembno področje elektrodinamike tudi danes. Dogovor velja, da v eno-dimenzijskih nalogah opisuje veliko izmero, kjer opazimo pojave elektrodinamike, koordinata z oziroma dolžina voda l . Prečne izmere prenosnih vodov so v številnih praktičnih primerih zadosti majhne, da jih lahko obravnavamo z enačbami elektrostatike in magnetostatike oziroma jih opišemo z gradniki električnih vezij.

Dva preprosta, silno uporabna in vsakdanja zgleda iz osnov elektrotehnike sta trakasti dvovod in koaksialni kabel. Preprosta zgleda sta izbrana z namenom, da se tu ne ukvarjamo s kompliciranim izračunom elektromagnetnega polja, kapacitivnosti in induktivnosti, pač pa že znani rezultat iz osnov elektrotehnike uporabimo v elektrodinamiki. Simetrični žični dvovod (parica) je prav tako uporaben vsakdanji zgled, le da so točni izrazi za kapacitivnost in induktivnost že malo bolj zahtevni.

Trakasti dvovod sestavljata dva kovinska vodnika v obliki trakov širine w , debeline s in dolžine l . Trakova sta razmaknjena za d v praznem prostoru. Trakova tvorita kondenzator s ploščama površine $w \times l$ na medsebojni razdalji d . Ista dva trakova tvorita tuljavo z enim samim ovojem s presekom jedra $d \times l$ in dolžino tuljave w .

Ko velja $w \gg d$, je večina električnega in magnetnega polja v reži med trakovima. Debelina trakov s postane nepomembna. Stresano električno in magnetno polje drugod po prostoru lahko zanemarimo oziroma

$$\Phi = \iint \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{A} = \mu_0 i \frac{d \cdot l}{w}$$

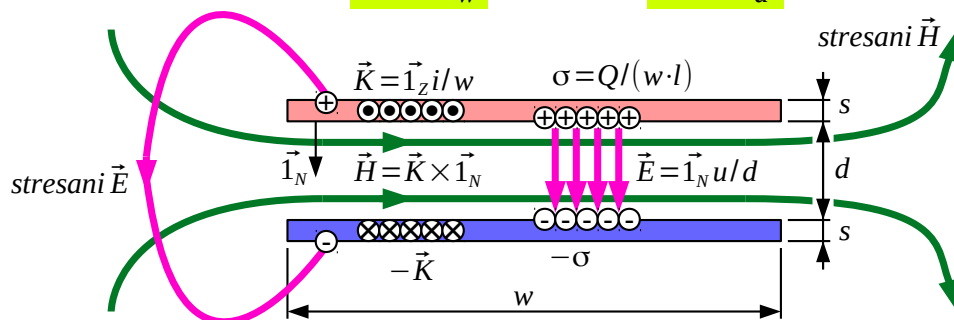
$$Q = \iint \sigma \, dA = \epsilon_0 u \frac{w \cdot l}{d}$$

$$L = \frac{\Phi}{i} = \mu_0 \frac{d \cdot l}{w}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{w \cdot l}{d}$$

$$L/l \approx \mu_0 \frac{d}{w}$$

$$C/l \approx \epsilon_0 \frac{w}{d}$$

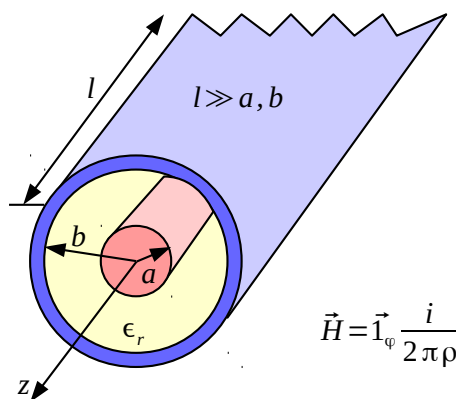


$w \gg d \rightarrow$ stresanje zanemarljivo

Poleg telegrafske enačbe je Oliver Heaviside izumil tudi koaksialni kabel. Koaksialni kabel sestavljajo kovinska žila s polmerom a , dielektrik ϵ_r in kovinski oklop z notranjim polmerom b . Kapacitivnost koaksialnega kabla izračunamo s pomočjo električnega polja preme elektrine. Slednje upada kot $1/\rho$, integracija električnega polja daje logaritem razmerja polmerov, ki nastopa v imenovalcu kapacitivnosti.

Enosmerni tok teče po celotnem preseku vodnikov. Enosmerno magnetno polje koaksialnega kabla se pojavi v notranjosti obeh vodnikov in v dielektriku med njima. Zunaj koaksialnega kabla ni nobenega polja, niti električnega niti magnetnega, ko se tok v žili v celoti vrača nazaj po oklopu.

V telekomunikacijah uporabljamo koaksialni kabel na tako visokih frekvencah, da tok teče samo po tanki koži debeline komaj nekaj mikrometrov $\delta \ll a, b$ po površinah vodnikov: po površini žile in po notranji površini oklopa. Magnetno polje v notranjosti vodnikov je tedaj zanemarljivo. Magnetno polje v dielektriku upada kot $1/\rho$, integracija daje logaritem razmerja polmerov, ki nastopa v izrazu za induktivnost:



$$\vec{E} = \vec{1}_\rho \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r\rho}$$

$$C = \frac{q \cdot l}{u} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$u = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

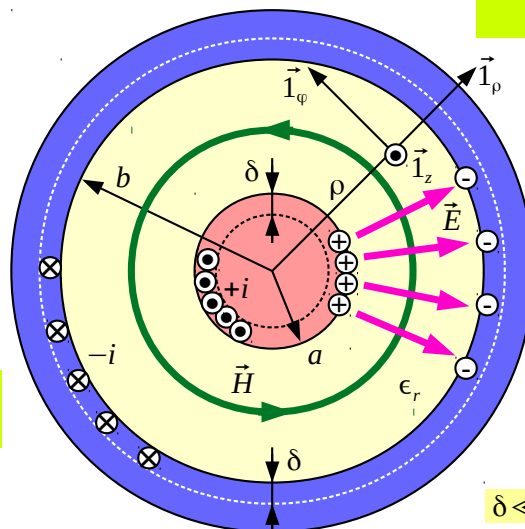
$$C/l = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\vec{H} = \vec{1}_\varphi \frac{i}{2\pi\rho}$$

$$\Phi = \iint \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L/l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

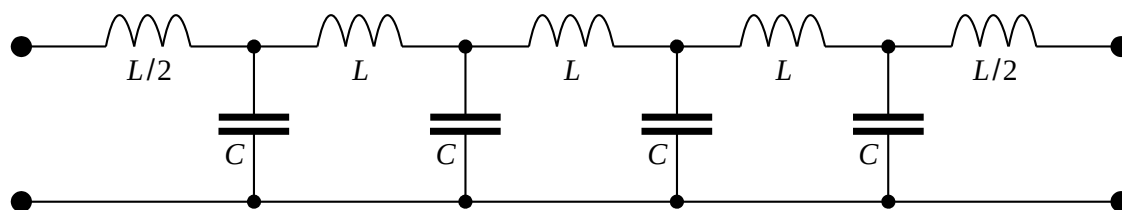


$$\delta \ll a, b$$

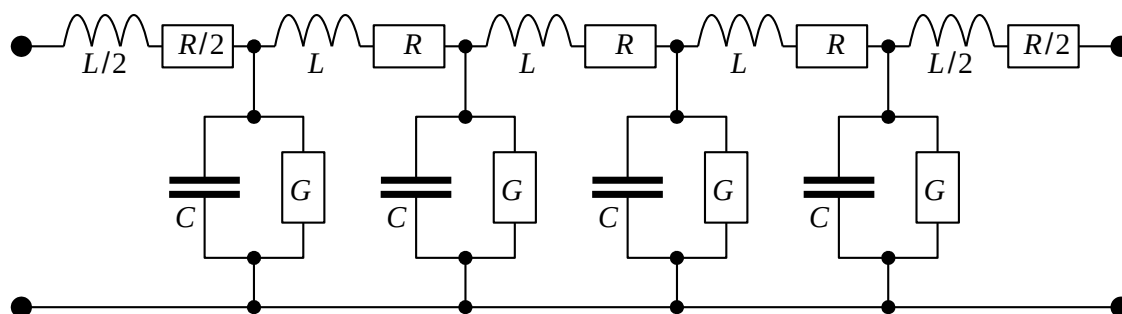
Koaksialni kabel

Induktivnost in kapacitivnost prenosnega voda sta porazdeljeni veličini po dolžini voda l . Električno nadomestno vezje mora torej vsebovati večje število zaporednih tuljav L in pripadajoče število vzporednih kondenzatorjev C . Za čimbolj natančen opis razdelimo eno od zaporednih tuljav na polovico, da nastopa $L/2$ na začetku in na koncu verige.

Natančnejši opis prenosnega voda vsebuje tudi izgube v kovinskih vodnikih in v dielektriku med njimi. Izgube v kovinskih vodnikih se kažejo kot upornost R , ki je vezana zaporedno induktivnosti L . Izgube v dielektriku ponazorimo na preprost način s prevodnostjo G , ki je vezana vzporedno kapacitivnosti C . Nadomestni vezji poenostavljenega voda brez izgub in natančnejši opis voda z izgubami sta prikazana na spodnji sliki:



Nadomestno vezje brezizgubnega voda

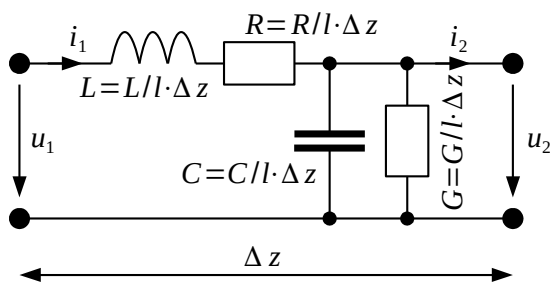


Nadomestno vezje voda z izgubami

Vsak elektrotehnik bo v takšnih vezjih prepoznal nizkoprepustno frekvenčno sito. Tu je z nadomestnim vezjem nekaj narobe, ker se resnični prenosni vodi nikakor ne obnašajo kot nizkoprepustna sita! Zaporna frekvenca navideznega sita sicer narašča z natančnostjo opisa, torej z višanjem števila nadomestnih tuljav in kondenzatorjev.

Računska zahtevnost reševanja električnega vezja je sorazmerna kubu (tretji potenci) števila vozlišč oziroma zank vezja, torej natančnejši opis z večjim številom tuljav in kondenzatorjev praktično ni uporaben. Za rešitev naloge je potreben drugačen pristop, ki ga opisuje telegrafska enačba:

Telegrafska enačba za vod z izgubami



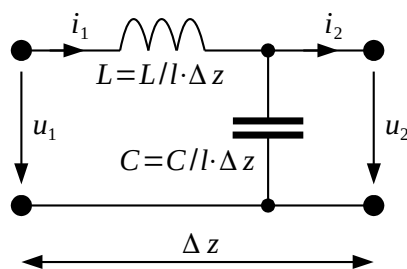
$$\Delta u = u_2 - u_1 = -L \cdot \frac{di_1}{dt} - R \cdot i_1$$

$$\Delta i = i_2 - i_1 = -C \cdot \frac{du_2}{dt} - G \cdot u_2$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -L/l \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - R/l \cdot i(z,t)$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C/l \cdot \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - G/l \cdot u(z,t)$$

Telegrafska enačba za brezizgubni vod



$$\Delta u = u_2 - u_1 = -L \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$\Delta i = i_2 - i_1 = -C \cdot \frac{du_2}{dt}$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -L/l \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C/l \cdot \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

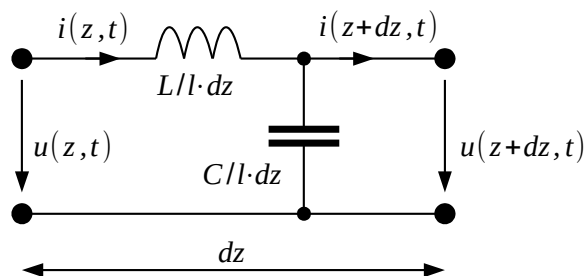
Napaka pri izračunu bo tem manjša, čim krajše odseke prenosnega voda Δz opisujemo s koncentriranimi gradniki: tuljavami in kondenzatorji. Če končno dolžino odseka Δz nadomestimo z diferencialno majhno dolžino odseka dz , dogajanje v nadomestnem vezju opisujeta dve sklopljeni parcialni diferencialni enačbi za napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$ s skupnim imenom telegrafska enačba.

V resničnem prenosnem vodu moramo upoštevati tudi izgube. Kovinski vodniki dodajajo od nič različno zaporedno upornost R . Nebrezhibna izolacija dodaja vzporedno prevodnost G . V resničnem vodu oba nista preprosti konstanti, pač pa sta komplicirani funkciji časa $R(t)$ in $G(t)$. Oba je lažje zapisati v frekvenčnem prostoru kot $R(\omega)$ in $G(\omega)$, zato se na opis dogajanja v vodu z izgubami vrnemo kasneje v frekvenčnem prostoru.

Prenosne vode sicer skušamo izdelati tako, da so izgube majhne. V tem primeru nam daje tudi telegrafska enačba za brezizgubni vod razmeroma dober vpogled v dogajanje na prenosnem vodu. Sklopljeni diferencialni enačbi poskusimo rešiti tako, da z dodatnim odvajanjem prve enačbe po položaju z oziroma druge enačbe po času t izločimo eno od neznank, na primer tok $i(z,t)$ in pri tem privzamemo, da matematično dovolj pohlevne funkcijo dopuščajo zamenjavo vrstnega reda odvajanja:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -L/l \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad \bigg/ \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C/l \cdot \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \quad \bigg/ \quad \frac{\partial}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = -L/l \cdot \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z \partial t} = -C/l \cdot \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = L/l \cdot C/l \cdot \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

$$u(z,t) = u\left(t \pm \frac{z}{v}\right)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L/l \cdot C/l}}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = u'' \left(t \pm \frac{z}{v}\right) \cdot \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = u'' \left(t \pm \frac{z}{v}\right)$$

Rešitev telegrafske enačbe

$$u(z,t) = u_N\left(t - \frac{z}{v}\right) + u_O\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

Napredujoči val

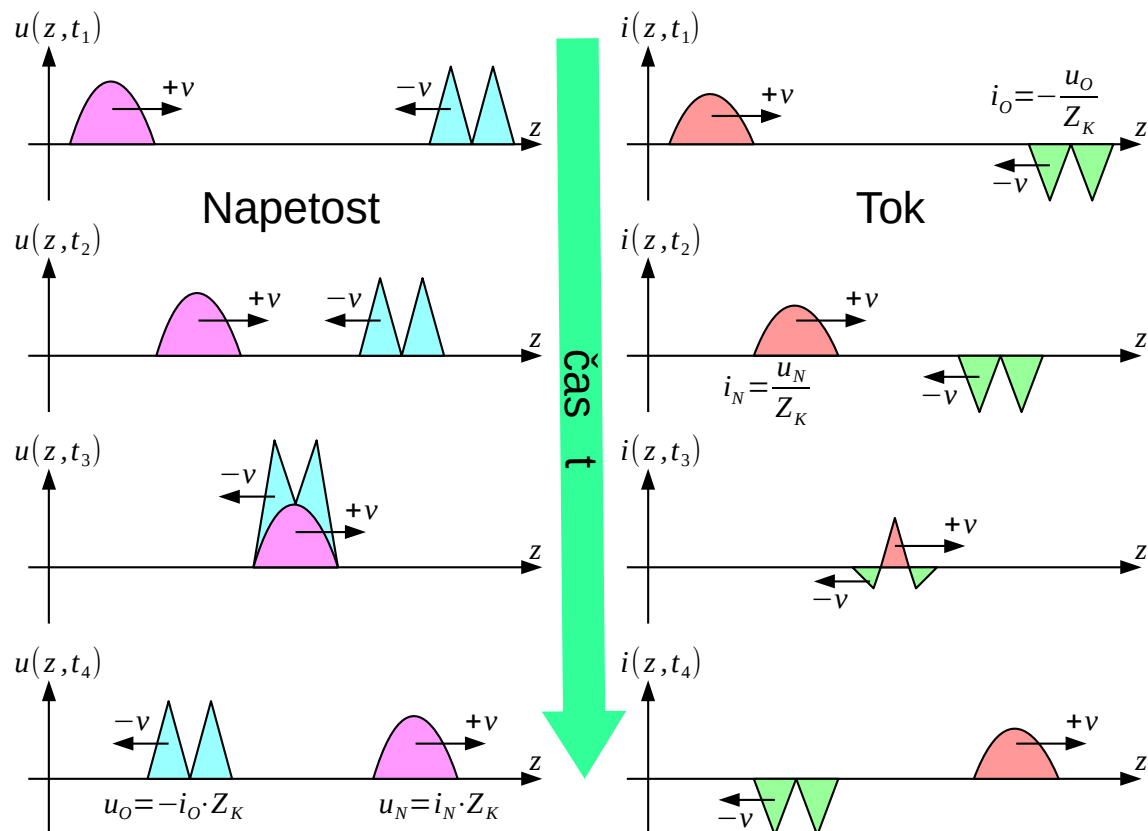
Odbiti (povratni) val

Ostane nam ena sama parcialna diferencialna enačba za napetost $u(z,t)$. V enačbi je razvidno, da se dvojna odvoda po položaju z oziroma po času t razlikujeta samo v množilni konstanti! Rešitev $u(z,t)$ je torej lahko poljubna funkcija enega samega argumenta $t \pm z/v$, primerno utežene vsote oziroma razlike časa t in položaja z .

Odvod funkcije enega argumenta označimo s črtico. Drugi odvod z dvema črticama. Po pravilu za odvajanje moramo rezultat pomnožiti še z odvodom argumenta $t \pm z/v$ po z oziroma t pripadajočega reda.

Povezavo med časom in položajem daje hitrost v , s katero se slika funkcije premika naprej oziroma nazaj po osi z . Rešitev z razliko imenujemo tudi napredujoči (vpadni) val in se z naraščajočim časom premika naprej, rešitev z vsoto pa odbiti (povratni) val in se premika nazaj.

Diferencialna enačba drugega reda zahteva dve popolnoma neodvisni rešitvi, napredujoči in odbiti val. Vsaka rešitev za napetost $u(z,t)$ ima pripadajočo rešitev za tok $i(z,t)$. Primer rešitve telegrafske enačbe je prikazan spodaj kot časovno zaporedje slikic. Zgleda za napredujoči in odbiti val napetosti $u(z,t)$ in toka $i(z,t)$ sta namenoma prostorsko omejena in prikazana v različnih barvah:



Povezavo med tokom in napetostjo napredujočega ali odbitega vala imenujemo karakteristična impedanca voda Z_K . Strogo gledano pojem impedanca smemo uporabljati samo v frekvenčnem prostoru. Na tem mestu v časovnem prostoru ga sicer ne bi smeli uporabljati, je pa smiselno uporabljati podobno oznako tako v časovnem kot v frekvenčnem prostoru.

Na srečo je karakteristična impedanca Z_K brezizgubnega voda povsem realno število in jo smemo uporabljati tudi v časovnem prostoru, kjer bi bil izraz karakteristična upornost R_K mogoče bolj smiseln? Dobimo jo z izračunom odvodov v eni od izvornih sklopljenih enačb. Najprej izračunamo odvod funkcije enega argumenta $t \pm z/v$, nato odvajamo še argument $t \pm z/v$ po z oziroma t .

Rezultat računa je razmerje med odvodom funkcije napetosti u' po argumentu $t \pm z/v$ in odvodom funkcije toka i' po istem argumentu $t \pm z/v$. V elektrodinamiki nas enosmerne konstante ne zanimajo, torej velja isto razmerje tudi med napetostjo u in tokom i :

Karakteristična impedanca

$$\frac{\partial}{\partial z} u \left(t \pm \frac{z}{v} \right) = -L/l \frac{\partial}{\partial t} i \left(t \pm \frac{z}{v} \right)$$

$$\frac{u'}{i'} = \mp v \cdot L/l = \mp \sqrt{\frac{L/l}{C/l}} = \mp Z_K = \frac{u}{i}$$

$$\pm \frac{1}{v} u' \left(t \pm \frac{z}{v} \right) = -L/l \cdot i' \left(t \pm \frac{z}{v} \right)$$

$$Z_K = \sqrt{\frac{L/l}{C/l}} = \frac{u_N}{i_N} = -\frac{u_O}{i_O}$$

Trakasti dvovod

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \frac{d}{w} \cdot \epsilon_0 \frac{w}{d}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$Z_K = \sqrt{\frac{\mu_0 \frac{w}{d}}{\epsilon_0 \frac{d}{w}}} = \frac{d}{w} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \frac{d}{w} \cdot 377 \Omega$$

Koaksialni kabel

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$Z_K = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx \frac{60 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pozor, razmerje med napetostjo in tokom napredujočega vala ima glede na naše oznake pozitiven predznak $+Z_K$, razmerje med tokom in napetostjo odbitega vala pa negativen predznak $-Z_K$. Napredujoči in odbiti val imata tudi vsak svojo, neodvisno moč in nosita vsak svojo, neodvisno energijo. V natančnem opisu v treh dimenzijah bi napredujoči in odbiti val na takšnih prenosnih vodih poimenovali kot dva neodvisna TEM (prečna elektro-magnetna) rodova.

Valovanje na prenosnem vodu vsebuje električno energijo in magnetno energijo $W = W_e + W_m$. Električno energijo na enoto dolžine določa napetost na vodu $W_e/l = 1/2 \cdot C/l \cdot u(z, t)^2$. Magnetno energijo na enoto dolžine določa tok na vodu $W_m/l = 1/2 \cdot L/l \cdot i(z, t)^2$.

Osamljen napredujoči val, na primer v trenutkih t_1 ali t_2 na časovnem zaporedju slikic, nosi povsem enako električno in magnetno energijo $W_e = W_m = 1/2 \cdot W_N$, kar zagotavlja povezava $u_N = Z_K \cdot i_N$ med napetostjo in tokom napredujočega vala:

$$W_e/l = 1/2 \cdot C/l \cdot u_N^2 = 1/2 \cdot C/l \cdot Z_K^2 \cdot i_N^2 = 1/2 \cdot L/l \cdot i_N^2 = W_m/l$$

Ista enakost velja za električno in magnetno energijo osamljenega odbitega vala $W_e = W_m = 1/2 \cdot W_O$, saj povezava $u_O = -Z_K \cdot i_O$ med napetostjo in tokom odbitega vala ponovno prinaša $u_O^2 = Z_K^2 \cdot i_O^2$.

Ko napredujoči in odbiti val soobstajata na istem delu prenosnega voda, na primer trčenje v trenutku t_3 na časovnem zaporedju slikic, električna in magnetna energija nista več enaki $W_e \neq W_m$! Ko imata napetosti napredujočega in odbitega vala isti predznak, se najmanj del magnetne energije pretvori v električno energijo. Obratno, ko imata napetosti napredujočega in odbitega vala različen predznak, se najmanj del električne energije pretvori v magnetno energijo.

Ko se napredujoči in odbiti val razideta v trenutku t_4 na časovnem zaporedju slikic, se energija pretvori nazaj v takšno obliko, da za osamljen napredujoči ali osamljen odbiti val ponovno velja $W_e = W_m = 1/2 \cdot W$.

Induktivnost L/l in kapacitivnost C/l prenosnega voda določata dve novi lastnosti voda: hitrost valovanja v in karakteristično impedanco Z_K . Hitrost valovanja v je enaka hitrosti svetlobe v snovi, ki je uporabljena kot izolator med vodnikoma TEM prenosnega voda. V primeru trakastega dvovoda je to prazen prostor, torej je hitrost valovanja $v = c_0$ enaka hitrosti svetlobe v praznem prostoru. Dielektrik koaksialnega kabla upočasnjuje svetlobo za faktor $\sqrt{\epsilon_r}$. Jasno, v koaksialnem kablu s praznim prostorom kot dielektrikom velja $v = c_0$.

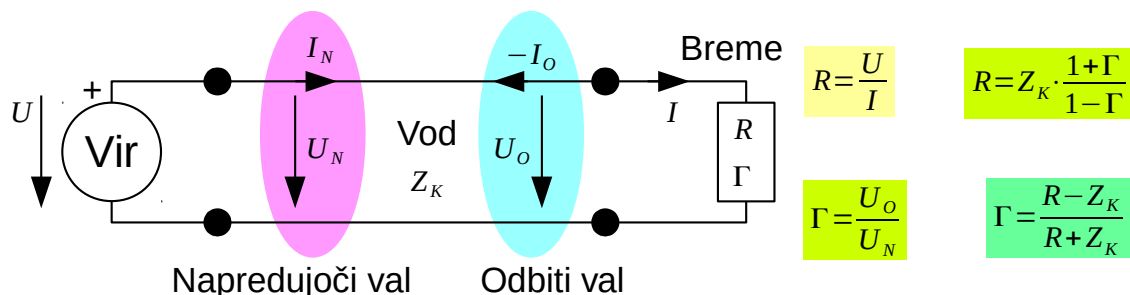
Točna geometrija TEM prenosnega voda, torej širina w in razmak trakov d trakastega dvovoda oziroma polmera žile a in oklopa b koaksialnega kabla, nima nobenega vpliva na hitrost valovanja v ! Prečni presek TEM prenosnega voda seveda določa karakteristično impedanco Z_K prenosnega voda. V primeru trakastega dvovoda določa karakteristično impedanco razmerje razmak/širina trakov d/w . V primeru koaksialnega kabla določata karakteristično impedanco razmerje polmerov oklopa/žile b/a in dielektrik ϵ_r med njima.

* * * * *

3. Odboj in zvonjenje

Rešitev telegrafske enačbe daje napetost $u(z, t)$ in tok $i(z, t)$ kot funkcijo položaja z na prenosnem vodu in časa t . Rešitev sestavljata napredujoči val in odbiti (povratni) val. Razmerje med napetostjo in tokom posameznih valov ni poljubno. Pri napredujočem valu znaša razmerje $+Z_K$, pri odbitem valu pa $-Z_K$. Brezizgubni prenosni vod v celoti opišemo z dvema podatkom: hitrostjo valovanja v in karakteristično impedanco Z_K .

Prenosni vod napajamo na začetku z virom, na drugem koncu pa ga zaključimo z bremenom. Najprej si oglejmo najpreprostejši zgled! Uporabimo enosmerni napetostni vir U in počakamo, da kakršenkoli prehodni pojav izzveni. Breme je upor R , ki določa razmerje med enosmerno napetostjo U in enosmernim tokom I :

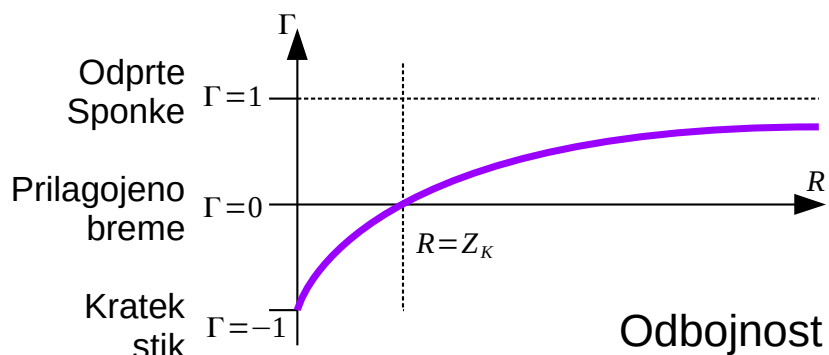


$$U = U_N + U_O \quad I = I_N + I_O = \frac{U_N}{Z_K} - \frac{U_O}{Z_K} \quad \longrightarrow \quad U_N - U_O = I \cdot Z_K = U \cdot \frac{Z_K}{R}$$

$$U_N = \frac{1}{2} \cdot \left(U + U \cdot \frac{Z_K}{R} \right)$$

$$U_O = \frac{1}{2} \cdot \left(U - U \cdot \frac{Z_K}{R} \right)$$

$$\Gamma = \frac{U - U \cdot \frac{Z_K}{R}}{U + U \cdot \frac{Z_K}{R}}$$



Upor R se v splošnem razlikuje od karakteristične impedance voda Z_K . Upor R torej vsiljuje drugačno razmerje med napetostjo U in tokom I , kot to zahteva rešitev valovne enačbe za napredujoči val. Rešitev

valovne enačbe za odbiti val zahteva negativno razmerje med napetostjo in tokom I , kar je še težje doseči.

Zahtevano razmerje bremena R med napetostjo U in tokom I lahko dosežemo edino tako, da dopuščamo na prenosnem vodu hkrati obe rešitvi telegrafske enačbe za napredujoči val U_N, I_N in za odbiti val U_O, I_O . Razmerje med odbitim in napredujočim valom imenujemo odbojnost (bremena) Γ . V elektrotehniki odbojnost vedno definiramo kot razmerje napetosti $\Gamma = U_O/U_N$ oziroma električnih poljskih jakosti $\Gamma = E_O/E_N$. Pri zvočnem valovanju je odbojnost definirana kot razmerje amplitud tlakov $\Gamma = p_O/p_N$.

Povsem jasno ima razmerje tokov $I_O/I_N = -\Gamma$ oziroma magnetnih poljskih jakosti $H_O/H_N = -\Gamma$ oziroma razmerje amplitud hitrosti delcev zvočnega valovanja $v_O/v_N = -\Gamma$ obrnjen predznak. Karakteristični impedanci $u/i = \pm Z_K$ je enakovredna povezava med električno in magnetno poljsko jakostjo, valovna impedanca snovi $E/H = \pm Z = \pm \sqrt{\mu/\epsilon}$ oziroma med amplitudama tlaka in hitrosti delcev, zvočna valovna impedanca $p/v = \pm Z = \pm \sqrt{C \cdot \rho}$, kjer sta C modul elastičnosti in ρ gostota snovi.

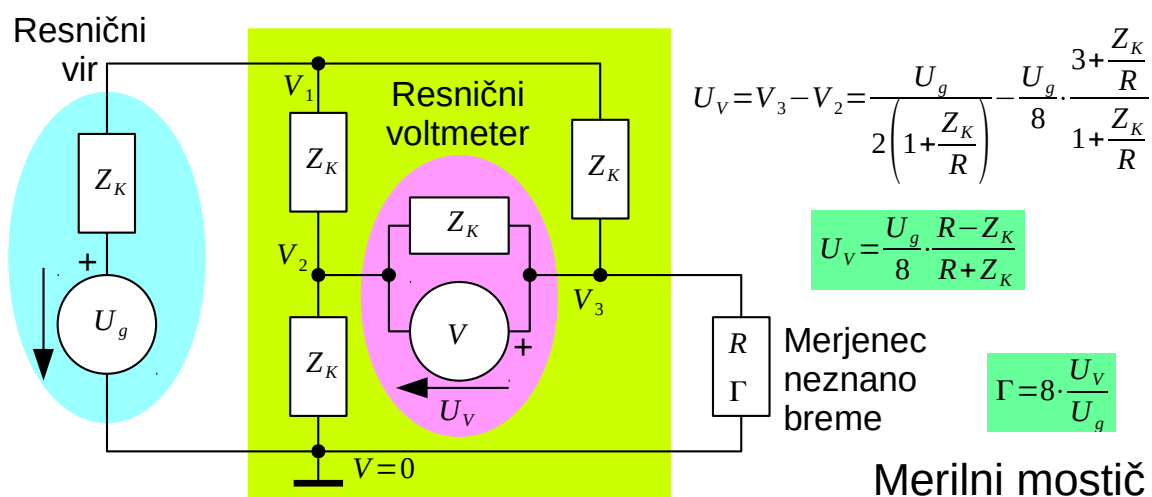
Odbojnost Γ v celoti opisuje električno obnašanje bremena povsem enakovredno njegovi električni upornosti R . Odbojnost Γ je dosti širši fizikalni pojem od električne upornosti R , saj je povsem točno določena tudi za elektromagnetna polja in številna druga valovanja v fiziki. Povsem jasno obstaja preprosta in enolična povezava v obe smeri: kako iz upornosti bremena R dobimo odbojnost Γ in obratno.

Odbojnost Γ je razmerje, torej neimenovano število. Uporaba odbojnosti Γ zahteva izbiro karakteristične impedance Z_K , ki ima v svetu električnih napetosti in tokov mersko enoto Ω (Ohm). Na drugi strani ima odbojnost Γ marsikatero prednost pri računanju oziroma pri meritvah. Za pasivno breme $R \geq 0$ je velikost odbojnosti $|\Gamma| \leq 1$ vedno manjša od enote!

Odbojnost Γ je načeloma lažje meriti od električne upornosti R . Električno upornost R določimo tako, da izmerimo napetost U z voltmetrom in tok I z ampermetrom. Pri tem nam nagaja bodisi notranja upornost voltmetra, ki ne more biti neskončno velika $R_V < \infty$ oziroma notranja upornost ampermetra, ki ne more biti neskončno majhna $R_A > 0$.

Odbojnost Γ lahko merimo na številne različne načine. Ena možna meritev odbojnosti Γ v svetu električnih napetosti in tokov je z merilnim mostičem. Mostič napajamo z resničnim električnim virom, ki ima končno in preprosto izvedljivo vrednost svoje lastne notranje upornosti $R_g = Z_K$. Kot merilnik napetosti uporabimo resnični voltmeter, ki ima končno in preprosto izvedljivo vrednost svoje lastne notranje upornosti $R_V = Z_K$:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{V_1 - U_g}{Z_K} + \frac{V_1 - V_2}{Z_K} + \frac{V_1 - V_3}{Z_K} = 0 \rightarrow 3V_1 = U_g + V_2 + V_3 \rightarrow 8V_2 = U_g + 4V_3 \rightarrow V_3 = \frac{U_g}{2\left(1 + \frac{Z_K}{R}\right)} \\ \textcircled{2} \quad & \frac{V_2 - V_1}{Z_K} + \frac{V_2 - V_3}{Z_K} + \frac{V_2}{Z_K} = 0 \rightarrow 3V_2 = V_1 + V_3 \rightarrow V_1 = 3V_2 - V_3 \\ \textcircled{3} \quad & \frac{V_3 - V_2}{Z_K} + \frac{V_3 - V_1}{Z_K} + \frac{V_3}{R} = 0 \rightarrow \left(2 + \frac{Z_K}{R}\right)V_3 = V_1 + V_2 \rightarrow \left(3 + \frac{Z_K}{R}\right)V_3 = 4V_2 \rightarrow V_2 = \frac{U_g}{8} \cdot \frac{3 + \frac{Z_K}{R}}{1 + \frac{Z_K}{R}} \end{aligned}$$

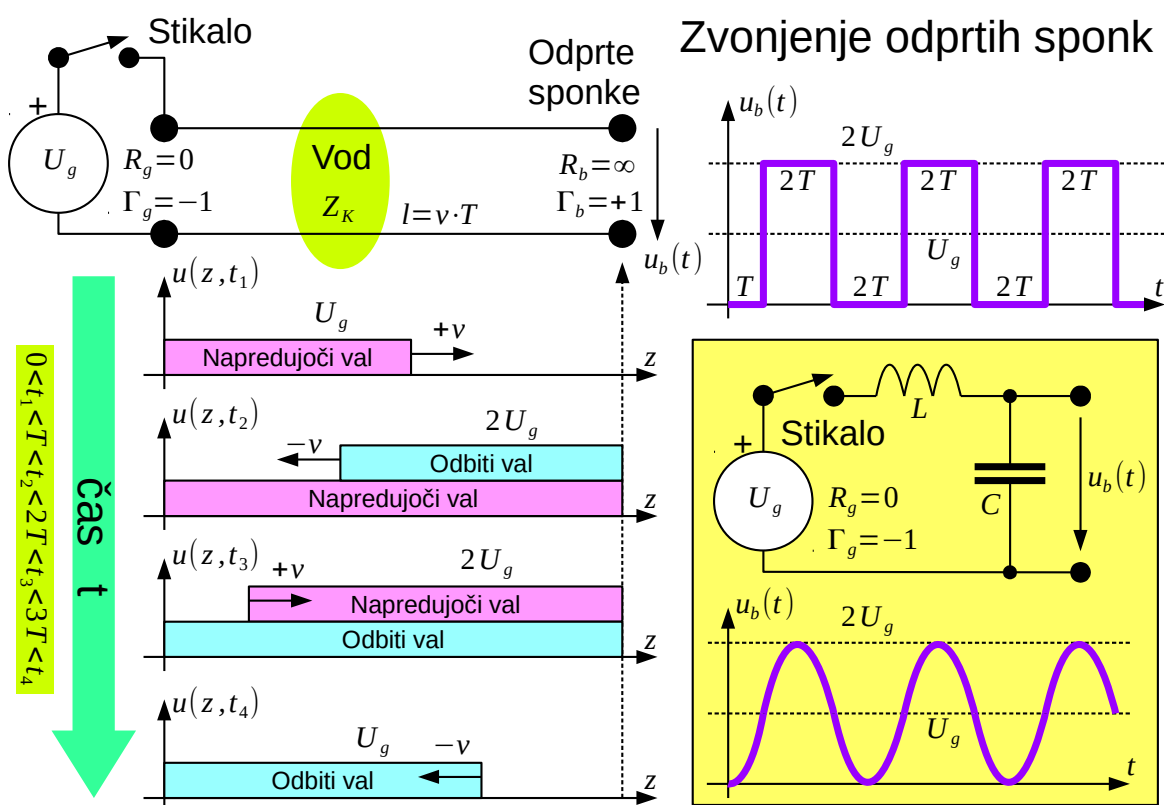


Ena od pomanjkljivosti merilnega mostiča je ta, da vir napajanja, voltmeter in merjenec nimajo ene skupne sponke, ki bi jo lahko ozemljili, kar je še posebno težavno pri visokih frekvencah. Prikazana ozemljitev na sliki je namenjena zgolj reševanju vozliščnih enačb za potenciale V_1 , V_2 in V_3 , iz katerih izračunamo odziv U_V merilnega mostiča. Odziv U_V je kar sorazmeren odbojnosti Γ neznanega bremena in napetosti vira U_g , ni potrebno nobeno dodatno preračunavanje! Prikazani mostič je torej električno vezje, ki je sposobno natančno ločiti napredujoči val od odbitega vala.

Oboroženi z novim pojmom odbojnosti Γ se lahko lotimo zahtevnejših nalog, na primer reševanju prehodnih pojavov ob preklapljanju v električnih vezjih. Tu osnove elektrotehnike ne znajo rešiti nekaterih preprostih nalog. Na primer, če na napetostni vir U priključimo kondenzator C ,

vanj steče elektrina $Q = C \cdot U$. Vir pri tem opravi delo $A = Q \cdot U$ in shrani energijo $W = Q \cdot U / 2$ v kondenzatorju. Polovica energije je očitno poniknila nekje v prehodnem pojavu?

Isto nalogo opisuje elektrodinamika nekoliko drugače. Koncentrirani gradniki so samo računska poenostavitve. V resnici imamo samo porazdeljene gradnike, to je porazdeljene kondenzatorje, porazdeljene tuljave itd. Kondenzator lahko v elektrodinamiki ponazorimo s prenosnim vodom, ki ima na drugem koncu odprte sponke:



Odprte sponke pomenijo neskončno upornost bremena $R_b = \infty$ in pripadajočo odbojnost $\Gamma_b = +1$. Napetostni vir U_g ima neskončno majhno notranjo upornost $R_g = 0$. Vir na začetku prenosnega voda opišemo z odbojnostjo vira, ki za napetostni vir znaša $\Gamma_g = -1$. Celoten prehodni pojav opisujemo kot odbijanje valovanja med virom na začetku voda in bremenom na koncu istega voda.

V trenutku, ko vključimo stikalo, vir še ne more vedeti, kaj je na drugem koncu prenosnega voda, saj odbitega vala takrat še ni! Vir pošilja v vod samo napredujoči val, torej sta napetost U in tok I v razmerju Z_K . Pripadajoča energija se kopiči kot energija električnega polja v

kapacitivnosti voda in kot magnetna energija v induktivnosti voda.

Čez čas T prednja fronta napredujočega vala doseže konec voda in se tam odbije. Ker znaša odbojnost odprtih sponk $\Gamma_b = +1$, ima napetost odbitega vala U_o enak predznak kot napetost napredujočega vala U_N . Skupna napetost na prenosnem vodu se podvoji na $2U_g$, tok za fronto odbitega vala upade na nič. Za fronto odbitega vala se vsa energija pretvori v električno energijo v porazdeljeni kapacitivnosti, magnetna energija pa upade na nič.

Čez čas $2T$ se odbiti val vrne do vira. Vir lahko šele tedaj izve, kaj se sploh dogaja na drugem koncu prenosnega voda! Odbiti val se ponovno odbije na viru. Ker ima slednji notranjo upornost nič $R_g = 0$, se odbiti val ponovno odbije z obratnim predznakom $\Gamma_g = -1$. Dvakrat odbiti val se natančno izniči s prvotnim napredujočim valom. Podirajoča fronta napredujočega vala tedaj prazni energijo, ki se je nakopičila v prenosnem vodu. Ker v tem trenutku izvor vidi le še odbiti val, odbiti val vrača viru nakopičeno energijo iz prenosnega voda.

Čez čas $3T$ podirajoča fronta napredujočega vala doseže konec voda. Napredujoči val povsem izgine. Napetost na odprtih sponkah upade na nič. Ker ni več napredujočega vala, se začne podirati tudi odbiti val, ki še vedno vrača nakopičeno energijo viru nazaj.

Čez čas $4T$ se vsa energija vrne nazaj v vir. Na prenosnem vodu ni več nobenega toka niti napetosti, torej nič energije. Celoten cikel nihanja energije se čez čas $4T$ ponovi na povsem enak način kot v trenutku, ko smo sklenili stikalo... Opisani pojav imenujemo zvonjenje prenosnega voda.

Zanimivo, popolnoma enakovredno zvonjenje opazimo tudi v vezju s koncentriranimi gradniki, ko kondenzator C priključimo na napetostni vir U_g preko zaporedne tuljave L , na primer induktivnosti priključnih žic. Tuljava L in kondenzator C tvorita električni zaporedni nihajni krog. Vklon stikala požene električno nihanje.

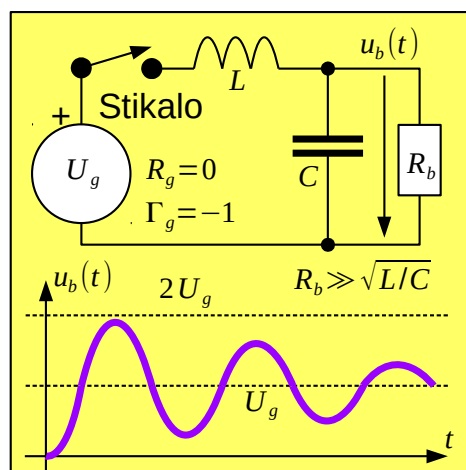
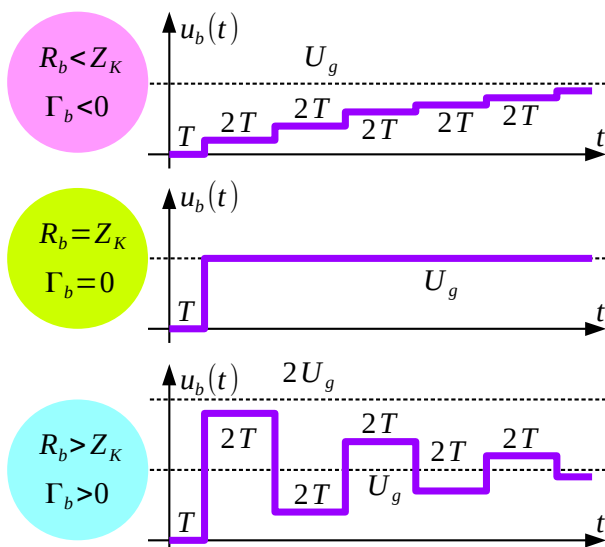
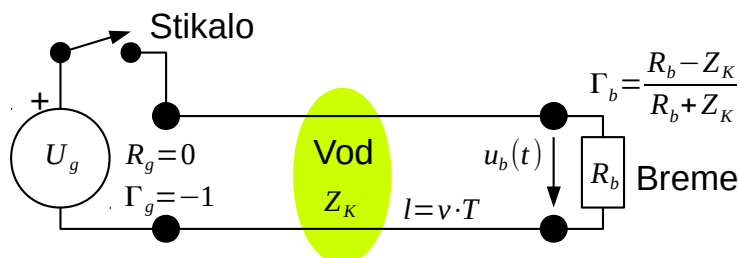
Napetost na odprtih sponkah oziroma na kondenzatorju niha med nič in dvakratno napetostjo vira $2U_g$. Razlika med prenosnim vodom s porazdeljenima induktivnostjo L/l in kapacitivnostjo C/l ter vezjem s koncentriranimi gradnikoma L in C je edino v časovni obliki nihanja napetosti: pravokotnik za prenosni vod s porazdeljenimi gradniki in sinus za koncentrirane gradnike.

Resnični koncentrirani gradniki in resnični prenosni vodi imajo tudi izgube, zaradi katerih opisani prehodni pojav izzveni. Dobro izdelane tuljave, kondenzatorji in prenosni vodi imajo majhne izgube, da opazimo tudi več kot 100 (sto!) prenihajev, preden prehodni pojav izzveni. Izvor izgub je tudi majhna, ampak končna notranja upornost vira $R_g \neq 0$. V točnejši tri-dimenzijski obravnavi bi morali upoštevati še izgube sevanja!

Električno zvonjenje je večinoma skrajno nezaželen pojav. Dvojna napetost vira $2U_g$ je pogosto vzrok odpovedi gradnikov električnih vezij, ki so načrtovani za napetost napajanja U_g . Zvonjenje vnaša napake v prenos podatkov v številskih vezjih. Zvonjenje omejujemo na različne načine: s prilagoditvijo upornosti (impedance) bremena R_b , z gradniki za omejevanje napetosti na bremenu, s prilagoditvijo notranje upornosti vira R_g , z omejevanjem hitrosti preklapljanja vira itd.

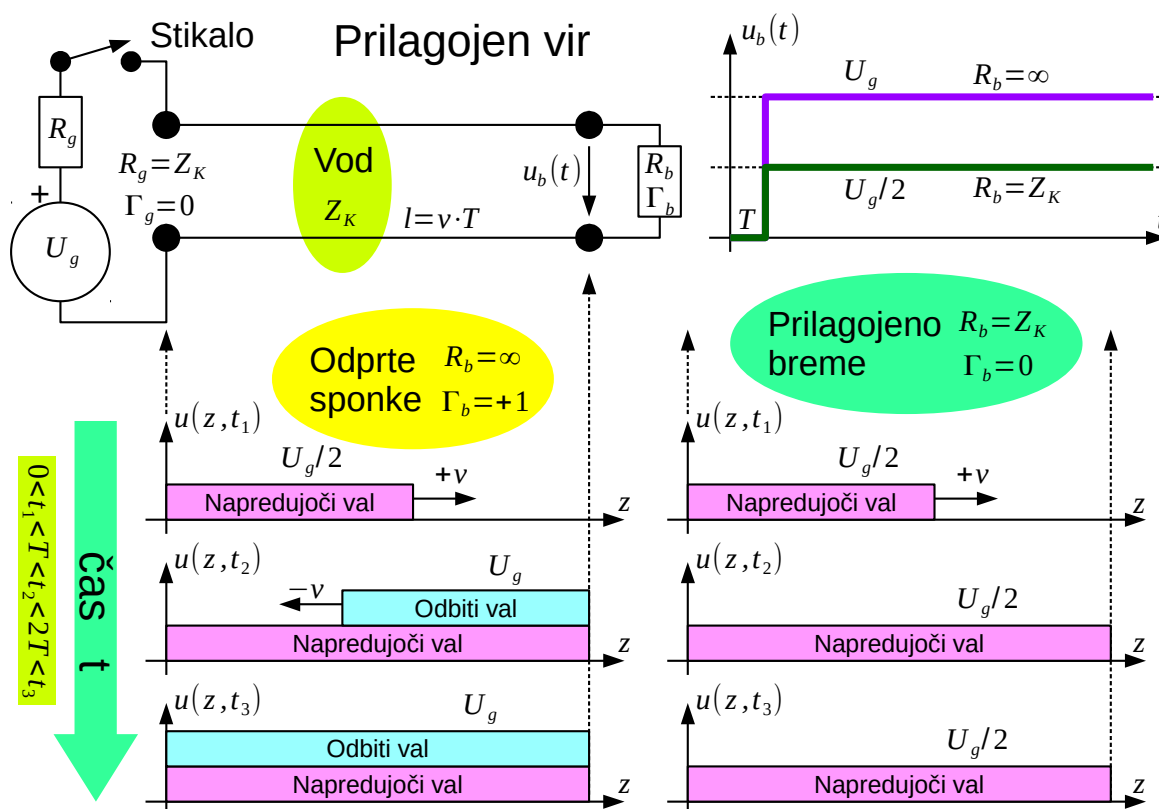
Učinek različnih bremen na zvonjenje je prikazan na spodnji sliki v sicer enakih pogojih kot za odprte sponke. Napetostni vir ima notranjo upornost $R_g = 0$. Stikalo požene prehodni pojav. Brezizgubni prenosni vod ima karakteristično impedanco Z_K . Njegova dolžina l določa zakasnitev T pri znani hitrosti valovanja v :

Zvonjenje bremen



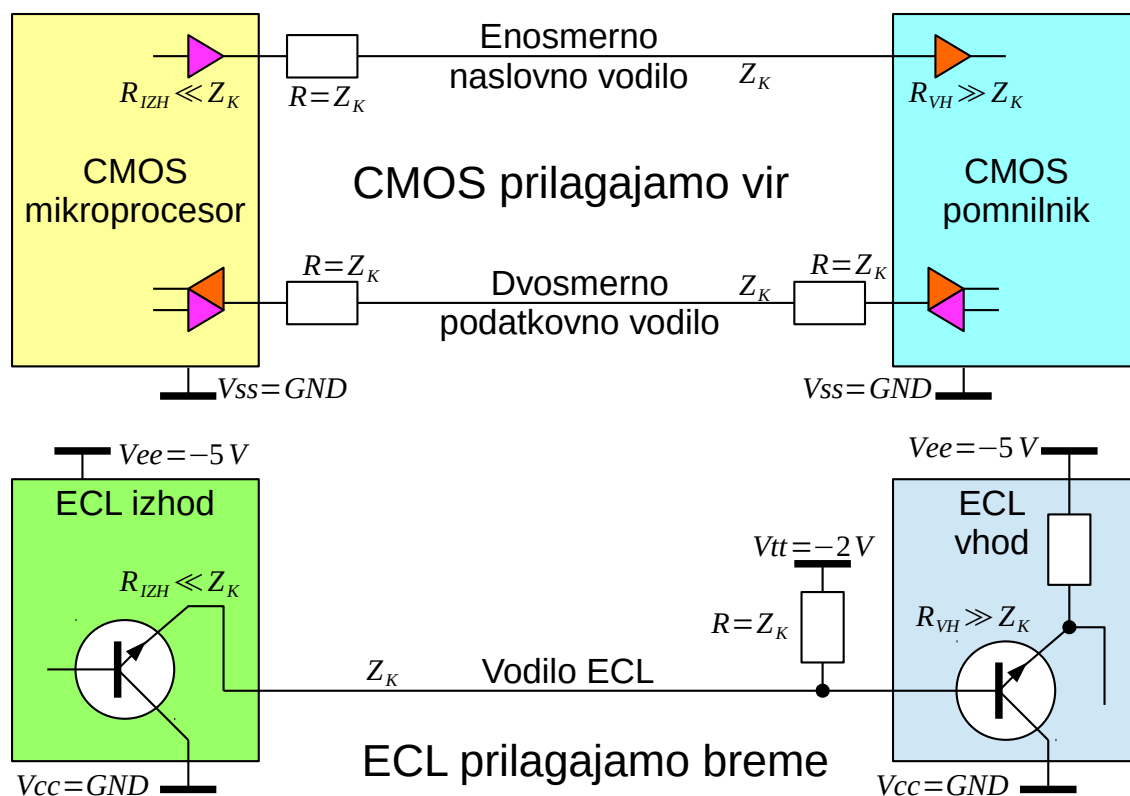
Dušen prenihaj dobimo samo v primeru, ko je upornost bremena $R_b > Z_K$ večja od karakteristične impedance Z_K oziroma korena razmerja L/C . Ko je upornost bremena $R_b < Z_K$, manjša od karakteristične impedance, napetost na bremenu monotono narašča po stopničkah proti končni vrednosti U_g . V primeru prilagojenega bremena $R_b = Z_K$ se prehodni pojav konča najhitreje, napetost na bremenu doseže končno vrednost U_g že po času T in se takoj ustali.

Zvonjenje prenosnega voda lahko učinkovito zadušimo tudi s prilagojenim virom. Prilagojeni vir ima svojo lastno notranjo upornost $R_g = Z_K$ enako karakteristični impedanci voda. Zvonjenje napetosti na bremenu $u_b(t)$ izgine v vseh primerih, od odprtih sponk $R_b = \infty$ do prilagojenega bremena $R_b = Z_K$:



Najstrožje zahteve po dušenju zvonjenja oziroma največje dopustne tolerance gradnikov omogoča prilagoditev na obeh koncih voda, vira in bremena, to se pravi $R_g = R_b = Z_K$. Takšna rešitev izgublja polovico moči signala na notranji upornosti vira, to se pravi na zaporednem dušilnem upor. Tudi napetost na bremenu je prepolovljena na $U_g/2$.

Zvonjenje je danes silno nadležen pojav na računalniških vodilih. Dolžine povezav med posameznimi čipi na tiskanem vezju so v velikostnem razredu $l \approx 10\text{ cm}$, torej je zakasnitev $T = l/v$ povsem primerljiva s preklopnimi časi logičnih signalov. Na električnih načrtih rišemo eno samo (signalno) žico prenosnega voda med oddajnikom (vijolični trikotnik) in sprejemnikom (oranžni trikotnik):



Druga žica je skupna elektroda ali masa (ground ali GND), ki jo na načrtih prikažemo z odebeljeno vodoravno črto ali znakom za ozemljitev. Masa je tudi praktično izdelana kot velika kovinska ploskev, ki izkorišča eno celo plast večslojnega tiskanega vezja. Pogosto uporabljamo več notranjih plasti večslojnega tiskanega vezja za razvod napajanj V_{DD} , V_{SS} , V_{CC} , V_{EE} , V_{GG} , V_{TT} itd, ki so s stališča elektrodinamike vsi enakovredni masi GND , čeprav so na različnih enosmernih potencialih.

Večina logičnih vezij je danes izdelana v tehnologiji CMOS. CMOS izhodi sodobnih logičnih vezij imajo zelo nizko izhodno upornost. Zvonjenje vodila na tiskanem vezju preprečujemo z dodatnim dušilnim uporom, ki ga vežemo zaporedno s CMOS izhodom v pripadajočo signalno žico. Na enosmernem vodilu, na primer naslovno vodilo mikroračunalnika, zadošča en zaporedni upor na CMOS izhodu.

CMOS vhodi so praktično odprte sponke z zelo majhno kapacitivnostjo. Opisana rešitev torej vsebuje prilagojen vir in neprilagojeno breme, odprte sponke CMOS vhoda. Prednost take rešitve je v tem, da CMOS vhod dobi polno napetost izvora U_g , torej se logične ravni signalov ohranjajo. Hkrati zaporedni dušilni upor ne troši nobene moči v stacionarnem stanju, ko se logična raven izhoda ne menja.

Na podatkovnem vodilu pretakamo podatke v obe smeri: beremo vsebino pomnilnika ali pa vanj vpisujemo. Ko je na enem koncu vodila dejaven oddajnik, drugi konec vodila sprejema. V takem (izmenično) dvosmernem vodilu opremimo z zaporednimi dušilnimi upori vse udeležence, ki lahko na vodilo karkoli oddajajo. Pri sprejemu ti upori nimajo učinka na delovanje CMOS vhodov. Logične ravni signalov se tudi tu ohranjajo.

ECL (Emitter-Coupled Logic) so vedno bile najhitrejše družine logičnih vezij. ECL izhodi običajno neposredno krmilijo prenosni vod. Ker je izhodna upornost ECL izhodov zelo nizka, se izhodi obnašajo kot napetostni vir z zelo nizko notranjo upornostjo $R_{IZH} \ll Z_K$. Zvonjenje preprečimo na sprejemni strani s primernim bremenskim uporom R . Zaključni upor R vezan na $V_{tt} = -2V$ hkrati poskrbi za enosmerni tok delovne točke emitorskega sledilnika v ECL izhodu. Sam ECL vhod ima razmeroma visoko notranjo upornost $R_{VH} \gg Z_K$.

ECL uporablja tri ravni napajanja: V_{cc} , V_{tt} in V_{ee} . Notranja skupna elektroda je V_{cc} in ta je največkrat tudi dejansko ozemljena $V_{cc} = GND$, kar je pogosto vzrok zmede na načrtih!

ECL vezja so bila vedno energetsko zelo požrešna. Znatno del moči napajanja se porabi tudi na zaključnih uporih R tako ob preklopih kot tudi v stacionarnem stanju. V ECL vezjih za frekvence nad 3GHz so zaključni upori na vhodih kar vgrajeni v sam čip logičnega integriranega vezja.

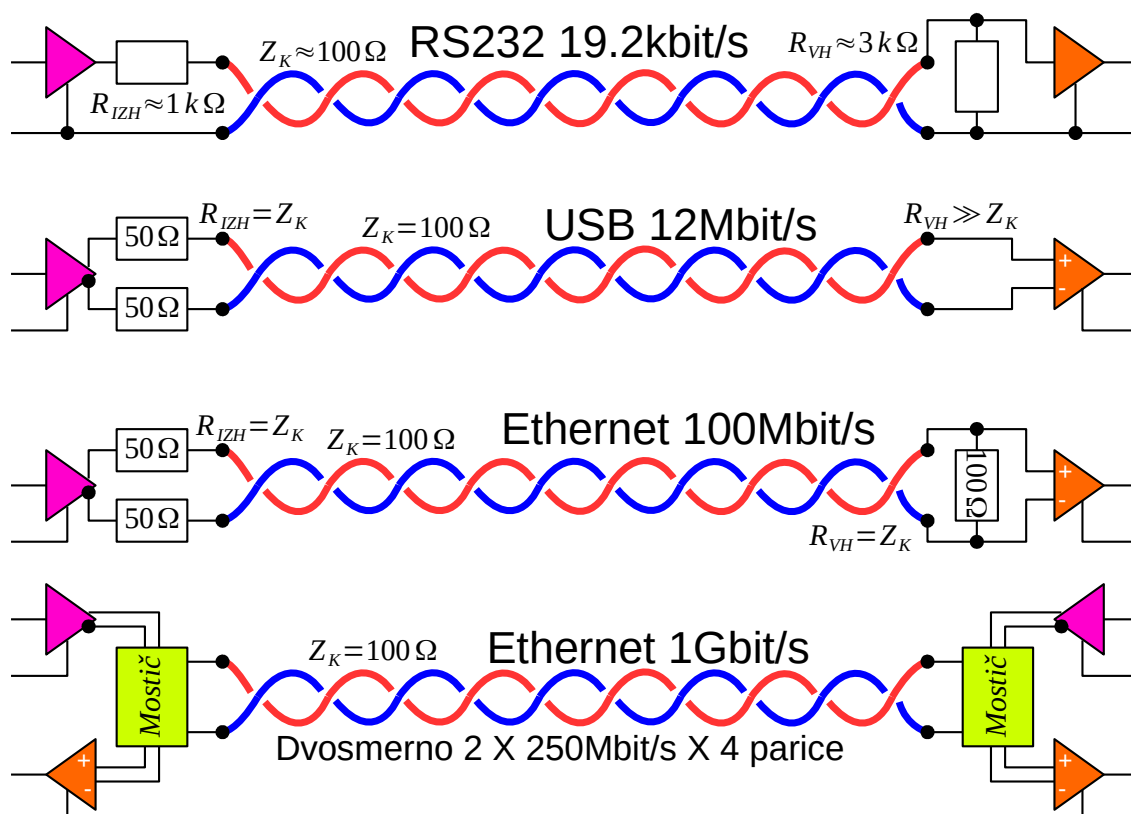
Logična vezja za najvišje frekvence imajo tako izhode in kot vhode že v notranjosti prilagojene na karakteristično impedanco prenosnega voda. Res hitra logična vezja običajno uporabljajo diferencialne izhode in vhode, ker ima simetrični dvovod boljše električne lastnosti od nesimetričnih vodov.

Simetrični dvovod pogosto uporabljamo v komunikacijah med računalniki na večjih razdaljah v velikostnem razredu $l \approx 100m$. Simetrični dvovod ima v teoriji nižje izgube od koaksialnega kabla in je hkrati cenejši za izdelavo, saj zahteva manj bakra. Sevanje in druge neželjene elektromagnetne presluhe močno duši smotrno izbrano prepletanje žic

simetričnega dvovoda, da dodaten oklop ni potreben.

Višanje prenosne hitrosti in različne protiukrepe proti zvonjenju še najbolj opazimo v razvoju zaporednih računalniških vmesnikov. Eden prvih takšnih vmesnikov je RS232, imenovan tudi »COM port« na računalnikih. RS232 naj bi omogočal prenos z zmogljivostjo 19.2kbit/s na razdalji do 18m. V resnici zmore RS232 več zmogljivosti na večji razdalji, predstavljene vrednosti so bile svoj čas izbrane z veliko rezervo!

Niti oddajnik niti sprejemnik RS232 nista prilagojena na karakteristično impedanco voda, ki ni točneje definirana. Simetrična parica je sicer uporabljena na nesimetričen način: ena žila je kar ozemljena na obeh straneh zveze, kar s stališča potovanja valov in odpornosti na elektromagnetne motnje zagotovo ni smotrno. Zvonjenje RS232 dušimo v oddajniku z omejevanjem hitrosti krmilnika (vijolični trikotnik) in višanjem njegove notranje upornosti $R_{IZH} \gg Z_K$:



Korak naprej je USB, ki uporablja diferencialni oddajnik (vijolični trikotnik), simetrični prenosni vod in diferencialni sprejemnik (oranžni trikotnik). Simetrični dvovod torej tu povsem pravilno uporabljamo v simetričnem načinu. Pri prenosni hitrosti 12Mbit/s (Full-Speed USB) na razdalji 2m je prilagojena samo izhodna upornost oddajnika $R_{IZH} = Z_K$.

Sprejemnik ima tako visoko vhodno upornost $R_{VH} \gg Z_K$, da se obnaša kot odprte sponke. Kar na sliki ni prikazano, USB uporablja isti dvovod izmenično v eno ali v drugo smer.

Ethernet dosega domet 100m po neoklopljeni prepleteni parici UTP (Unshielded Twisted Pair). Domet omejujeta slabljenje in popačenje prenosnega voda. Prenosna hitrost 100Mbit/s zahteva prilagojeno notranjo upornost oddajnika $R_{IZH} = Z_K$ in prilagojeno vhodno upornost sprejemnika $R_{VH} = Z_K$, da zvonjenje ne moti prenosa podatkov. Podobno so izvedeni tudi High-Speed USB za 480Mbit/s in številni drugi hitri računalniški vmesniki.

Gigabitni Ethernet gre še en korak naprej in v celoti izkorišča teorijo telegrafske enačbe, ki pravi, da sta napredujoči val in povratni val popolnoma neodvisna eden od drugega, vsak ima svojo energijo in vsak prenaša svojo moč. Zmogljivost 1Gbit/s dosega tako, da po vsaki od štirih paric UTP kabla pelje 250Mbit/s. Istočasni dvosmerni prenos omogočajo mostiči na obeh koncih prenosnega voda, ki ločijo povratni val od napredujočega vala.

Pri dvosmernem prenosu v gigabitnem Ethernetu bo kakršenkoli odboj povzročil presluh med napredujočim valom in povratnim valom. Oddajniki, sprejemniki in mostiči morajo biti zato dobro prilagojeni na karakteristično impedanco parice $Z_K = 100\Omega$. Ker so tolerance gradnikov, vodov in vtičnic prevelike, ima sprejemnik za gigabitni Ethernet vgrajena še vezja, ki se sproti prilagajajo, da izločajo presluh lastnega oddajnika in zvonjenje željenega sprejetega signala.

Istočasni dvosmerni prenos na istem vodu je sicer izumil že Oliver Heaviside v drugi polovici 19. stoletja. Izuma takrat niso razumeli. Izum je moral počakati celih 120 let, da je končno zaživel v gigabitnem Ethernetu!

* * * * *

4. Frekvenčni prostor in kazalci

Obravnava elektrotehnične naloge je v časovnem prostoru povsem nazorna. Trenutne fizikalne veličine, na primer napetost $u(t)$ in tok $i(t)$, so natančno tisto, kar vidimo na zaslonu osciloskopa. Časovno odvisnost namenoma poudarimo z zapisom veličin z malimi črkami. Reševanje enačb tudi s povsem linearnimi gradniki žal v časovnem prostoru ni preprosto. Obnašanje gradnikov, ki lahko hranijo energijo, na primer tuljav L oziroma kondenzatorjev C , opisujejo odvodi oziroma integrali vpletenih veličin.

Matematiki se reševanju linearnih enačb z odvodi in integrali spretno izognejo z integralskimi transformacijami. Obnašanju linearnega vezja pri krmiljenju s harmonskimi (sinusnimi) signali se dobro prilega Fourierjeva transformacija v frekvenčni prostor s krožno (realno) frekvenco ω . Za obravnavo prehodnih pojavov v linearnih vezjih je primernejša Laplacejeva transformacija s kompleksno frekvenco $s = \sigma + j\omega$. V obeh primerih se časovni odvodi oziroma integrali preslikajo v množenje oziroma deljenje s frekvenco:

Časovni prostor

Fourier

Laplace

$$f(t)$$



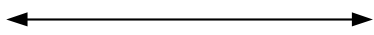
$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(s) = \int f(t) e^{-st} dt$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

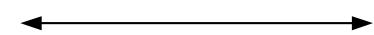
$$\frac{d}{dt} f(t)$$



$$j\omega \cdot F(\omega)$$

$$s \cdot F(s)$$

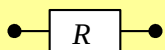
$$\int f(t) dt$$



$$\frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega)$$

$$\frac{1}{s} \cdot F(s)$$

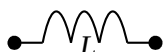
$$u(t) = R \cdot i(t)$$



$$U(\omega) = R \cdot I(\omega)$$

$$U(s) = R \cdot I(s)$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$



$$U(\omega) = j\omega L \cdot I(\omega)$$

$$U(s) = sL \cdot I(s)$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$



$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega C} \cdot I(\omega)$$

$$U(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s)$$

Jasno moramo pri kateremkoli integriranju meje postaviti tako, da je na

mejah integracije energija v gradnikih, tuljavah L in kondenzatorjih C enaka nič oziroma upoštevana v dodatnih integracijskih konstantah. Na primer, začetno energijo v kondenzatorju upoštevamo kot dodatno napetost U_0 , ki jo prištejemo integralu za napetost na kondenzatorju. Pri uporabi integralnih transformacij se jasno vprašamo, kaj v resnici pomenijo nove veličine, spektri $I(\omega)$ in $U(\omega)$ oziroma $I(s)$ in $U(s)$ v pripadajočem frekvenčnem prostoru ter kako jih izmerimo?

Najpreprostejši zgled je krmiljenje vezja s harmonskim virom ene same frekvence ω . Izmenično napetost $u(t)$ tedaj opisujeta dva realna podatka: amplituda U in pripadajoči fazni kot φ_U . Izraz $\cos(\omega t + \varphi_U)$ lahko zapišemo tudi kot realni del kompleksne eksponentne funkcije. Oba realna podatka U in φ_U , ki imata jasno določen fizikalni pomen, združimo v eno samo kompleksno število \hat{U} , ki ga imenujemo kazalec (angleško: phasor) napetosti:

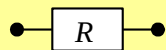
$$u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varphi_U) = \operatorname{Re}[U \cdot e^{j\varphi_U} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\hat{U} \cdot e^{j\omega t}]$$

$$i(t) = I \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) = \operatorname{Re}[I \cdot e^{j\varphi_I} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\hat{I} \cdot e^{j\omega t}]$$

Kazalci

$$\hat{U} = U \cdot e^{j\varphi_U}$$

$$\hat{I} = I \cdot e^{j\varphi_I}$$



$$u(t) = R \cdot i(t) = \operatorname{Re}[R \cdot \hat{I} \cdot e^{j\omega t}]$$

$$\hat{U} = R \cdot \hat{I}$$



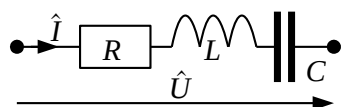
$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \operatorname{Re}[L \cdot \hat{I} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}]$$

$$\hat{U} = j\omega L \cdot \hat{I}$$



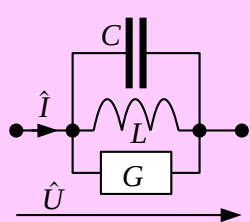
$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{C} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\hat{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \hat{I}$$



$$\hat{U} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \hat{I} = Z \cdot \hat{I}$$

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + jX$$



$$\hat{I} = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + G\right) \cdot \hat{U} = Y \cdot \hat{U}$$

$$G = 1/R$$

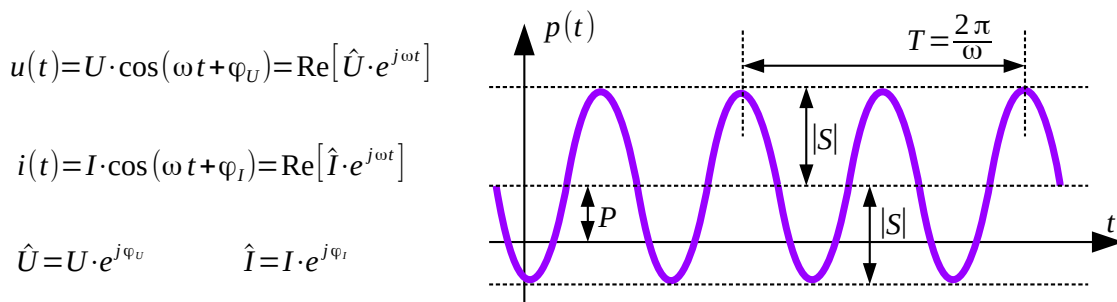
$$Y = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + G = G + jB$$

Računanje s kazalci \hat{U} in \hat{I} postane z izjemo uporabe kompleksnih števil silno enostavno. Časovne odvode oziroma integrale zamenja množenje oziroma deljenje z $j\omega$. Integracijske konstante, energije v tuljavah L in v kondenzatorjih C , smemo zanemariti, saj pri eni sami frekvenci ω opazujemo ustaljeno (stacionarno) stanje vezja, ko je kakršenkoli prehodni

pojav že izzvenel.

Pri računu s kazalci je smiselno uvesti nova pojma impedance Z in admittance Y . Impedanca Z je kompleksna upornost, ki vključuje realno upornost R in imaginarno reaktanco jX . Admitanca Y je kompleksna prevodnost, ki vključuje realno prevodnost G in imaginarno susceptanco jB . Imaginarni veličini reaktanca jX oziroma susceptanca jB opisujeta gradnike, ki hranijo energijo: tuljave L in kondenzatorje C . Takšne gradnike imenujemo reaktivni gradniki.

Preprost račun s kazalci oziroma spektri integralnih transformacij odpove, ko trčimo ob nelinearno nalogo. Najpogostejša nelinearna naloga je izračun moči. V časovnem prostoru je trenutna moč $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ zmnožek trenutne napetosti in toka. Pri harmonskem krmiljenju trenutna moč niha z dvakratno frekvenco 2ω kot posledica kvadratne naloge, množenja napetosti in toka. Moč lahko v določenih trenutkih postane tudi negativna, ko tuljave L in kondenzatorji C vračajo vskladiščeno energijo nazaj viru:



$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_U) \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) = \frac{U \cdot I}{2} \cdot [\cos(\varphi_U - \varphi_I) + \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)]$$

Kompleksna moč

$$S = P + jQ = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_U} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_I}}{2} = \frac{U \cdot I}{2} \cdot e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}$$

Navidezna moč

$$|S| = \left| \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} \right| = \frac{U \cdot I}{2} = \frac{p(t_{MAX}) - p(t_{MIN})}{2}$$

Delovna moč

$$P = \langle p(t) \rangle = \operatorname{Re} \left[\frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} \right] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \operatorname{Re} [e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I)$$

Jalova moč

$$Q = \operatorname{Im} \left[\frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} \right] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \operatorname{Im} [e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \sin(\varphi_U - \varphi_I)$$

Pri računanju s kazalci \hat{U} in \hat{I} je smiselno uvesti nov pojem kompleksne moči $S = P + jQ$. Pri izračunu moči je pomembna razlika med faznim kotom napetosti in toka $\varphi_U - \varphi_I$. Na primer, kompleksna moč na upor R je povsem delovna in večja od nič, razlika med faznima kotoma

$\varphi_U - \varphi_I = 0$ je tedaj enaka nič. Reaktivni gradniki, tuljave L in kondenzatorji C , samo hranijo energijo, ne trošijo pa nobene moči, zato je kompleksna moč na njih povsem jalova in znaša razlika med faznima kotoma $\varphi_U - \varphi_I = \pm \pi/2$.

Razliko faznega kota dobimo z množenjem kazalca napetosti \hat{U} s konjugirano-kompleksno vrednostjo kazalca toka \hat{I}^* . Ker kazalca \hat{U} in \hat{I}^* vsebujeta amplitudi, torej vršni vrednosti harmonske napetosti in toka, moramo rezultat za moč deliti z dva! Deljenje z dva neposredno sledi iz izračuna povprečne moči $\langle p(t) \rangle$, ko razstavimo produkt kosinusov v vsoto in izločimo nihanje moči z dvojno frekvenco 2ω .

V praksi pogosto uporabljamo efektivni vrednosti toka $I_{\text{eff}} = I/\sqrt{2}$ in napetosti $U_{\text{eff}} = U/\sqrt{2}$, da se izognemo deljenju z dva pri računanju moči. Podobno lahko definiramo tudi kazalca $\hat{I}_{\text{eff}} = \hat{I}/\sqrt{2}$ in $\hat{U}_{\text{eff}} = \hat{U}/\sqrt{2}$. Pri navajanju oziroma uporabi podatkov v praksi moramo biti zelo previdni, kaj točno mislimo: amplitudo (vršno vrednost) z merskimi enotami V ali efektivno (koren povprečja kvadratov, angleško: root-mean-square ali RMS) vrednost z merskimi enotami V_{eff} (V_{RMS})?

Da je zmešnjava popolna, obstajata poleg amplitude in efektivne vrednosti še dve dodatni merski enoti za napetost. Napetost vrh-vrh je za harmonski signal točno dvojna amplituda $U_{\text{pp}} = 2U$ in jo merimo v enotah V_{pp} (angleško: volts peak-to-peak). Napetost »emf« (angleško: electromotive force) je efektivna napetost odprtih sponk vira, ki ima notranjo impedanco $Z_g = Z_K$ enako dogovorjeni karakteristični impedanci. Ko je takšen vir priključen na breme $Z_b = Z_K$, velja $U_{\text{emf}} = U_{\text{geff}} = 2U_{\text{eff}}$. Pripadajoča merska enota V_{emf} se uporablja za opis občutljivosti radijskega sprejemnika.

Realni del kompleksne moči $S = P + jQ$ je delovna moč $P = \langle p(t) \rangle$ oziroma dolgotrajno časovno povprečje trenutne moči. Navidezna moč $|S|$ opisuje amplitudo nihanja trenutne moči $p(t)$ z dvakratno frekvenco 2ω okoli povprečja $P = \langle p(t) \rangle$. Imaginarni del kompleksne moči $S = P + jQ$ je jalova moč Q , torej merilo za vskladiščeno energijo v reaktivnih gradnikih: tuljavah L in kondenzatorjih C .

V elektrodinamiki si pogosto ne moremo privoščiti zgoraj opisanega razkošja črk in oznak frekvenčnega prostora. Ko želimo izrecno poudariti

kazalce, pripadajoči veličini \hat{U} in \hat{I} zapisujemo s strešicami nad velikimi črkami, da jih razlikujemo od enosmernih veličin oziroma amplitud U in I . V večini nalog elektrodinamike si razkošja dodatnih strešic ne želimo. Ko za določene veličine natančno vemo, da so kazalci, zanje uporabljamo kar velike črke brez strešic. Na primer, U in I v takšni nalogi pomenita kazalce!

Podobno si ne moremo privoščiti uporabe treh različnih črk P , Q in S samo za zapis kompleksne moči. V elektrodinamiki uporabljamo veliko črko P kar za kompleksno moč. $\text{Re}[P]$ je tedaj delovna moč, $|P|$ navidezna moč in $\text{Im}[P]$ jalova moč. Veliko črko S v elektrodinamiki najpogosteje uporabljamo za gostoto kompleksne moči na enoto površine z merskimi enotami W/m^2 . Realni del, velikost in imaginarni del pomenijo gostoto delovne moči $\text{Re}[S]$, gostoto navidezne moči $|S|$ in gostoto jalove moči $\text{Im}[S]$.

Končno je težava še s kazalci, ki jih nemarneži v tuji literaturi imenujejo kar vektorji namesto pravilnega angleškega izraza phasor. Vektorji so nekaj povsem drugega, potrebujemo jih za opis nekaterih fizikalnih veličin v tri-dimenzijskih nalogah. V elektrodinamiki pogosto naletimo na veličine, ki so hkrati vektorji in kazalci, na primer izmenično (harmonsko) električno polje \vec{E} . Kaj takrat točno pomeni izraz $|\vec{E}|$, je treba razvozljati iz pripadajočega besedila oziroma smisla naloge: velikost vektorja (kompleksni skalar), velikost kazalca (realni vektor) ali oboje (realni skalar)?

Pri meritvi časovno-spremenljivih fizikalnih veličin takoj naletimo na vprašanje merjenja časa oziroma točne sinhronizacije. Osciloskop lahko pravilno prikaže trenutne veličine, na primer napetost $u(t)$ oziroma tok $i(t)$ samo v primeru, da natančno poznamo čas t , torej poskrbimo za pravilno proženje časovne baze osciloskopa.

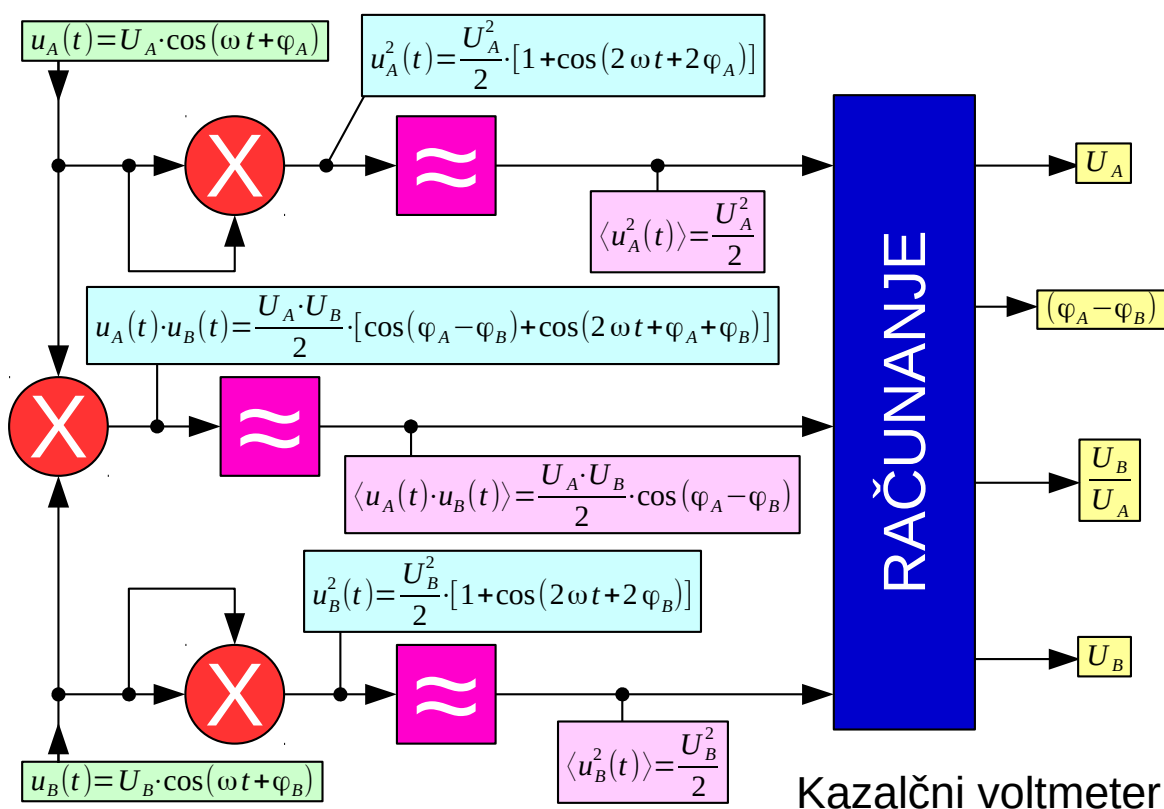
Sam osciloskop večinoma ne vsebuje neke silno natančne oziroma absolutne (atomske) ure za določanje časa t . Še slabšo natančnost določanja časa t lahko pričakujemo od kakršnegakoli merjenja. Časovno bazo osciloskopa zato največkrat prožimo kar na sam merjeni signal, na primer napetost $u(t)$. Časovno bazo osciloskopa lahko prožimo na nek drug signal v vezju, na primer na tok bremena $i(t)$, ki je v neposredni zvezi z merjeno veličino, na primer napetost na istem bremenu $u(t)$.

V frekvenčnem prostoru se vprašanje določanja časa preslika v vprašanje določanja faze neke merjene kazalčne veličine. Preprost izmenični

voltmeter meri samo amplitudo napetosti oziroma velikost kazalca $|\hat{U}|$ in jo prikaže v dogovorjenih merskih enotah V ali V_{eff} (V_{RMS}) ali V_{pp} . Izmenični voltmeter v svoji notranjosti meri povprečje kvadratov, torej povprečno izmenično moč, saj se informacija o absolutni fazi kazalca napetosti \hat{U} popolnoma izgubi pri povprečenju!

Podobno kot večinoma ne moremo meriti absolutnega časa t , večinoma ne moremo meriti niti absolutne faze φ neke kazalčne veličine. V frekvenčnem prostoru opazujemo hitrejša pojava v daljših časovnih razdobjih, torej je naloga določanja absolutne faze še težja. Frekvenca najboljše atomske ure, ki jo znamo danes izdelati, relativno odstopa $\Delta f/f \approx \pm 10^{-14}$. Če dve taki enaki, ampak popolnoma neodvisni atomski uri vgradimo v merjenec in v merilnik, lahko pri nazivni frekvenci $f = 1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$ odstopanje faze preseže $\Delta \varphi = \Delta \omega \cdot t > 10 \text{ rd}$ že po enem dnevu!

Relativno odstopanje frekvence telekomunikacijskih naprav je v velikostnem razredu $\Delta f/f \approx \pm 10^{-6}$, merilniki so kvečjemu za en velikostni razred boljši. Meritev absolutne faze je tem primeru popolnoma nesmiselna. Vse, kar lahko praktično izmerimo, je relativna faza oziroma fazna razlika med dvema izmeničnima signaloma iste frekvence ω s kazalčnim voltmetrom:



Preprost kazalčni voltmeter na sliki uporablja množilnike in nizkoprepustna frekvenčna sita. Če oba vhoda množilnika krmilimo z istim signalom $u(t)$, dobimo na njegovem izhodu $u^2(t)$ in po povprečenju v nizkoprepustnem situ srednjo vrednost kvadratov $\langle u^2(t) \rangle$, torej kvadrat efektivne vrednosti. Če na vhoda množilnika pripeljemo različna signala $u_A(t)$ in $u_B(t)$, dobimo na izhodu nizkoprepustnega sita poleg amplitud obeh signalov še kosinus fazne razlike $\cos(\varphi_A - \varphi_B)$.

Kazalčni voltmeter je dosti bolj komplicirana naprava od običajnega izmeničnega voltmetra tako za izdelavo kot pri praktični uporabi. Kazalčni voltmeter ima vsaj dva neodvisna vhoda (dva para priključnih sponk) in lahko meri edino fazno razliko med njima, ne more pa meriti absolutne faze. Glede na notranjo obdelavo signalov (analogno oziroma številsko računanje) lahko kazalčni voltmeter prikaže samo eno amplitudo, obe amplitudi oziroma njen kvocient v linearnih ali logaritemskih merskih enotah.

Kazalčni voltmeter izdelovalci merilne opreme pogosto imenujejo »vektorski voltmeter«. Strogo gledano je takšno ime neupravičeno, ker je električna napetost v vsakem primeru skalarna veličina, kvečjemu merimo kazalec napetosti. S pojmom »skalarni merilnik« označujejo izdelovalci merilnik amplitude, ki ne zna meriti faze. Skalarni analizator vezij (Scalar Network Analyzer ali SNA) torej meri samo amplitudo prevajalne funkcije $|H(\omega)| = |U_{IZHOD}/U_{VHOD}|$ (razmerje amplitud). Vektorski analizator vezij (Vector Network Analyzer ali VNA) meri amplitudo in fazo prevajalne funkcije, torej celoten $H(\omega) = U_{IZHOD}/U_{VHOD}$ (kompleksno razmerje kazalcev).

Pri meritvi celotnega frekvenčnega spektra $F(\omega)$ je določanje faze še veliko bolj zahtevno kot pri meritvi na eni sami frekvenci ω . Večina merilnikov spektra, napravo imenujemo spektralni analizator (Spectrum Analyzer ali SA), meri samo amplitudo frekvenčnega spektra $|F(\omega)|$ oziroma valovno-dolžinskega spektra $|F(\lambda)|$. Spektralni analizatorji večinoma sploh niso opremljeni s kakršnimkoli vhodom, ki bi omogočal proženje oziroma sinhronizacijo meritve faze na zunanjo referenco.

Pri zelo visokih frekvencah, na primer v optičnih komunikacijah $f \approx 200 \text{ THz} = 2 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ($\lambda_0 = c_0/f \approx 1.5 \mu\text{m}$), je amplituda frekvenčnega $|F(\omega)|$ oziroma valovno-dolžinskega $|F(\lambda)|$ spektra celo edina veličina, ki jo sploh lahko merimo. Na tako visokih frekvencah ne moremo meriti niti faze spektra $F(\omega)$ niti električnega polja $E(t)$ oziroma kakršnihkoli drugih veličin v časovnem prostoru. Omejitve naše merilne tehnike torej dajejo dodaten pomen frekvenčnemu prostoru, kjer

lahko merimo vsaj amplitudo spektra, za razliko od časovnega prostora, kjer na visokih frekvencah ne znamo izmeriti ničesar.

V frekvenčnem prostoru so slabljenja in ojačanja lahko zelo visoka razmerja z razponom amplitud tudi več kot $1:10^6$ oziroma razponom moči več kot $1:10^{12}$. Povrhu rešitev telegrafske enačbe in številnih drugih nalog navajajo slabljenje v logaritemskih enotah. Logaritemske merske enote Nepri za razmerje amplitud in decibeli za razmerje moči so zato zelo priljubljene in praktično uporabne:

Neper

$$a_{Np} = \ln \frac{|\hat{U}_1|}{|\hat{U}_2|}$$

$$P = \frac{|\hat{U}|^2}{2Z_K} \quad |\hat{U}| = \sqrt{2Z_K P}$$

$$a_{Np} = \ln \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Decibel

$$a_{dB} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$a_{dB} = 10 \cdot \log \left| \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} \right|^2 = 20 \cdot \log \left| \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} \right|$$

$$a_{dB} = \frac{20}{\ln 10} \cdot \ln \left| \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} \right| = \frac{20}{2.3026} \cdot a_{Np}$$

Logaritemske enote za moč

$$P_{dBm} = 10 \cdot \log \frac{P}{1 \text{ mW}} \quad P_{dBW} = 10 \cdot \log \frac{P}{1 \text{ W}}$$

$$1 \text{ kW} = 60 \text{ dBm} = 30 \text{ dBW}$$

$$1 \text{ W} = 30 \text{ dBm} = 0 \text{ dBW}$$

$$1 \text{ mW} = 0 \text{ dBm} = -30 \text{ dBW}$$

$$1 \mu \text{ W} = -30 \text{ dBm} = -60 \text{ dBW}$$

$$1 \text{ nW} = -60 \text{ dBm} = -90 \text{ dBW}$$

$$1 \text{ pW} = -90 \text{ dBm} = -120 \text{ dBW}$$

$$1 \text{ fW} = -120 \text{ dBm} = -150 \text{ dBW}$$

Logaritemske merske enote

Nepri [Np] navajajo slabljenje a_{Np} oziroma ojačanje kot naravni logaritem razmerja amplitud napetosti (toka, polja, pritiska, hitrosti). Ker so pri izbrani (karakteristični) impedanci Z_K moči sorazmerne kvadratom pripadajočih amplitud, moramo razmerje moči koreniti oziroma razpoloviti rezultat naravnega logaritma. Rešitve telegrafske enačbe in drugih nalog dajejo rezultat kot naravni logaritem razmerja amplitud, torej so Nepri tu naravna merska enota. Nepri postanejo nerodni za uporabo, ko imamo več različnih vrst vodov z različnimi karakterističnimi impedancami Z_K , saj so vezani na razmerja napetosti oziroma polja.

Decibeli [dB] navajajo slabljenje a_{dB} oziroma ojačanje kot

desetkratnik desetiškega logaritma (delovne) moči. Pri izbrani (karakteristični) impedanci Z_K moramo za izračun decibelov razmerje amplitud najprej kvadrirati oziroma pomnožiti desetiški logaritem razmerja amplitud z 20 . Decibeli uporabljajo vsem preprosto razumljiv desetiški logaritem, razmerje moči pri tem ni vezano na neko karakteristično impedanco Z_K niti na vrsto prenosnega voda oziroma valovanja.

Pri pretvorbi iz Neprov v decibele upoštevamo drugačno osnovo logaritma, pretvorbo razmerja amplitud v razmerje moči in dogovorjeni desetkratnik za decibele. Decibel je mišljen kot desetina (deci) merske enote Bell. Skupaj dobimo faktor $20/\ln 10$. Obratno vrednost istega faktorja uporabljamo pri pretvorbi iz decibelov v Nepre.

Logaritemske merske enote pogosto uporabljamo tudi za moči, napetosti, tlake (zvoka) in druge fizikalne veličine. Ker logaritem deluje na razmerje, si moramo izbrati neko referenčno moč, napetost itd, glede na katero zapišemo razmerje v decibelih. Pri tem je najpogosteje uporabljena merska enota $[dBm]$ za električno moč v primerjavi z referenčno močjo $P_{REF} = 1 \text{ mW}$.

Manj znana, a bolj smiselna enota za električno moč je $[dBW]$, to je moč glede na referenco $P_{REF} = 1 \text{ W}$. Merska enota $[dB\mu V]$ lahko pomeni napetost oziroma moč. Moč je mišljena v razmerju z referenčno močjo, ki jo predstavlja napetost $U_{eff} = 1 \mu V_{eff}$ na karakteristični impedanci $Z_K = 75 \Omega$.

Logaritemske merske enote niso uporabne za fazo! Fazo, bolj točno razliko faze vedno navajamo vadianih v neposrednih rešitvah enačb oziroma v stopinjah v rezultatih meritev. Kazalčno veličino merilniki najpogosteje prikazujejo kot amplitudo v decibelih in hkrati pripadajočo fazo v stopinjah.

* * * * *

5. Smithov diagram

Podobno kot ostale elektrotehnične naloge lahko prenosne vode obravnavamo v časovnem prostoru oziroma v frekvenčnem prostoru. Obravnava voda v frekvenčnem prostoru je povsem smiselna, ko z vodom prenašamo razmeroma ozkopasovne signale s pasovno širino $\Delta f \ll f_0$ dosti manjšo od osrednje frekvence, kar je pogost primer v radijskih oddajnikih in sprejemnikih. Obravnava izgub prenosnega voda je bolj preprosta v frekvenčnem prostoru. Končno nam obravnava v frekvenčnem prostoru prinese nov vpogled v delovanje prenosnega voda, tako v teoriji kot pri praktičnih meritvah.

V frekvenčnem prostoru, bolj točno pri krmiljenju s harmonskim virom ene same frekvence ω , trenutni veličini napetost $u(z, t)$ in tok $i(z, t)$ zamenjata kazalca napetosti $U(z)$ in toka, ki ju tu pišemo brez strešic. Časovne oziroma frekvenčne odvisnosti posebej ne zapisujemo, saj k vsakemu kazalcu sodi zraven člen $e^{j\omega t}$. Slednjega po dogovoru ne zapisujemo, saj se v linearnih enačbah vedno natančno krajša.

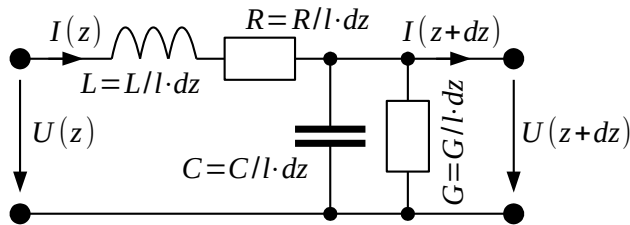
Telegrafsko enačbo prevedemo v frekvenčni prostor tako, da vse odvode po času zapišemo kot $\partial/\partial t = j\omega$. Ostanejo nam seveda odvodi po dolžini $\partial/\partial z$. Kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ sta funkciji ene same spremenljivke z , torej lahko delne odvode $\partial/\partial z = d/dz$ pišemo kot navadne odvode.

Pri reševanju sklopljenih diferencialnih enačb za kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ uporabimo namig iz časovnega prostora, kjer je prostorska odvisnost zelo podobna funkcija časovni odvisnosti. Enačbi poskusimo rešiti v frekvenčnem prostoru tako, da predpostavimo odvisnost od spremenljivke z v obliki $e^{\mp jkz}$. Pri tem je k lahko poljubna konstanta, tudi kompleksna. Konstanta k ima sicer globlji fizikalni pomen, da si zasluži svoje lastno ime: valovno število.

Z uvedbo valovnega števila k pišemo odvode po dolžini z v obliki $d/dz = \mp jk$. Predznak $-$ ali $+$ izbiramo v frekvenčnem prostoru na povsem enak način kot v časovnem prostoru, torej rešitev za napredujoči ali odbiti val. Drugi odvod po spremenljivki z ima vedno enak predznak $d^2/dz^2 = -k^2$ ne glede na to, ali gre za napredujoči oziroma odbiti val.

Z uvedbo valovnega števila k in poenostavitvijo odvodov po dolžini z postane rešitev telegrafske enačbe v frekvenčnem prostoru silno preprosta, ne glede na to, ali upoštevamo izgube ali ne:

Vod z izgubami



$$\frac{dU(z)}{dz} = -j\omega L/l \cdot I(z) - R/l \cdot I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -j\omega C/l \cdot U(z) - G/l \cdot U(z)$$

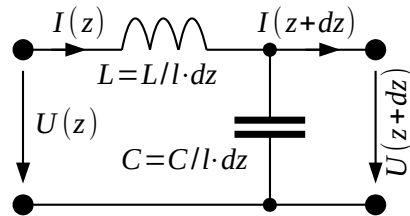
$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} = (j\omega L/l + R/l)(j\omega C/l + G/l) \cdot U(z) = -k^2 U(z)$$

$$k = \beta - j\alpha = \sqrt{-(j\omega L/l + R/l) \cdot (j\omega C/l + G/l)}$$

$$U(z) = U_N(0) \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} + U_O(0) \cdot e^{+\alpha z} \cdot e^{+j\beta z}$$

$$u(z, t) = \text{Re} \left[U_N(0) \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} + U_O(0) \cdot e^{+\alpha z} \cdot e^{j(\omega t + \beta z)} \right]$$

Brezizgubni vod

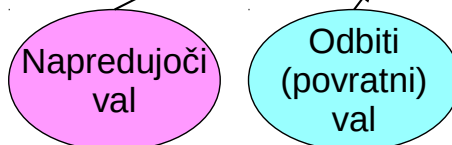


$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} = -\omega^2 L/l \cdot C/l \cdot U(z) = -k^2 U(z)$$

$$k = \beta = \omega \sqrt{L/l \cdot C/l} = \frac{\omega}{v}$$

$$U(z) = U_N(0) \cdot e^{-j\beta z} + U_O(0) \cdot e^{+j\beta z}$$

$$u(z, t) = \text{Re} \left[U_N(0) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} + U_O(0) \cdot e^{j(\omega t + \beta z)} \right]$$



Brezizgubni vod ima povsem realno valovno število k . Valovno število k brezizgubnega voda opisuje samo spreminjanje faze kot funkcija dolžine z . Valovno število je tedaj kar enako fazni konstanti $k = \beta$, ki ima merske enote rd/m (radiani na meter). Povsem jasno faza napredujočega vala zaostaja z dolžino $e^{-j\beta z}$, faza odbitega vala pa napreduje z dolžino $e^{+j\beta z}$.

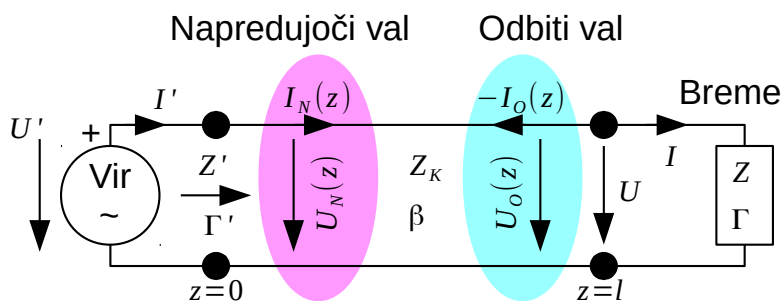
Pri krmiljenju s harmonskim virom ene frekvenca ω lahko na prenosnem vodu uvedemo pojem valovne dolžine λ . Valovna dolžina je tista razdalja, ko se faza kazalcev napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ ponovi oziroma naredi polni krog $\beta \cdot \lambda = 2\pi$. Valovno dolžino lahko izračunamo iz fazne konstante oziroma iz hitrosti valovanja: $\lambda = 2\pi/\beta = 2\pi v/\omega = v/f$.

Vod z izgubami ima kompleksno valovno število $k = \beta - j\alpha$. Realni del valovnega števila je tudi v tem primeru fazna konstanta $\beta = \text{Re}[k]$, ki ima povsem enak fizikalni pomen kot pri brezizgubnem vodu. Imaginarni del $\alpha = -\text{Im}[k]$ opisuje slabljenje voda na enoto dolžine v logaritemskih merskih enotah Np/m (Nepri na meter). Slabljenje napredujočega vala v

smeri $+z$ zapišemo kot $e^{-\alpha z}$, slabljenje odbitega vala v smeri $-z$ pa kot $e^{+\alpha z}$.

Na povsem enak način kot v časovnem prostoru tudi v frekvenčnem prostoru poimenujemo razmerje med odbitim in napredujočim valom odbojnost $\Gamma = U_o(z)/U_N(z)$. Razmerje dveh kazalcev je seveda kompleksno število, ki je funkcija položaja $\Gamma = \Gamma(z)$. Na brezizgubnem vodu se spreminjata samo fazi napredujočega vala $U_N(z)$ in odbitega vala $U_o(z)$. Absolutna vrednosti kompleksne odbojnosti $|\Gamma(z)|$ oziroma velikost odbojnosti se vzdolž brezizgubnega voda ne spreminja!

Kompleksno odbojnost Γ na priključnih sponkah bremena izračunamo na podoben način kot v časovnem prostoru, le da upornost bremena R v frekvenčnem prostoru nadomesti impedanca bremena Z . Karakteristično impedanco Z_K brezizgubnega voda izračunamo v frekvenčnem prostoru na povsem enak način kot v časovnem prostoru. Povsem jasno se predznak odbojnosti zamenja pri računanju z dualnimi veličinami, admitanco bremena Y in karakteristično admitanco prenosnega voda Y_K :



Brezizgubni vod

$$U_N(z) = U_N(0) \cdot e^{-j\beta z}$$

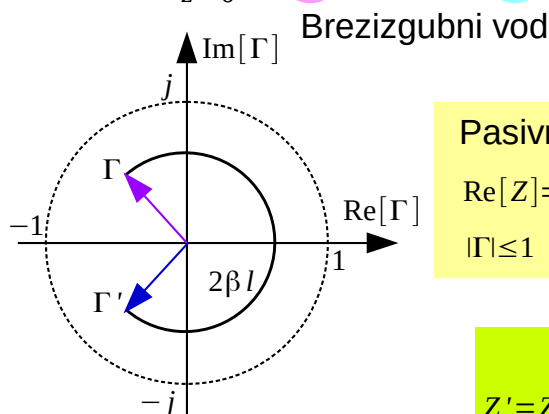
$$U_o(z) = U_o(0) \cdot e^{+j\beta z}$$

$$\frac{U_N}{I_N} = \frac{-U_o}{I_o} = Z_K = \sqrt{\frac{L/l}{C/l}}$$

$$\Gamma = \frac{Z - Z_K}{Z + Z_K} = \frac{Y_K - Y}{Y_K + Y} = \frac{U_o(l)}{U_N(l)}$$

$$\Gamma' = \frac{U_o(0)}{U_N(0)} = \Gamma \cdot e^{-j2\beta l}$$

$$Z' = Z_K \cdot \frac{1 + \Gamma'}{1 - \Gamma'}$$



Smith-ov diagram

Pasivno breme

$$\text{Re}[Z] = R \geq 0$$

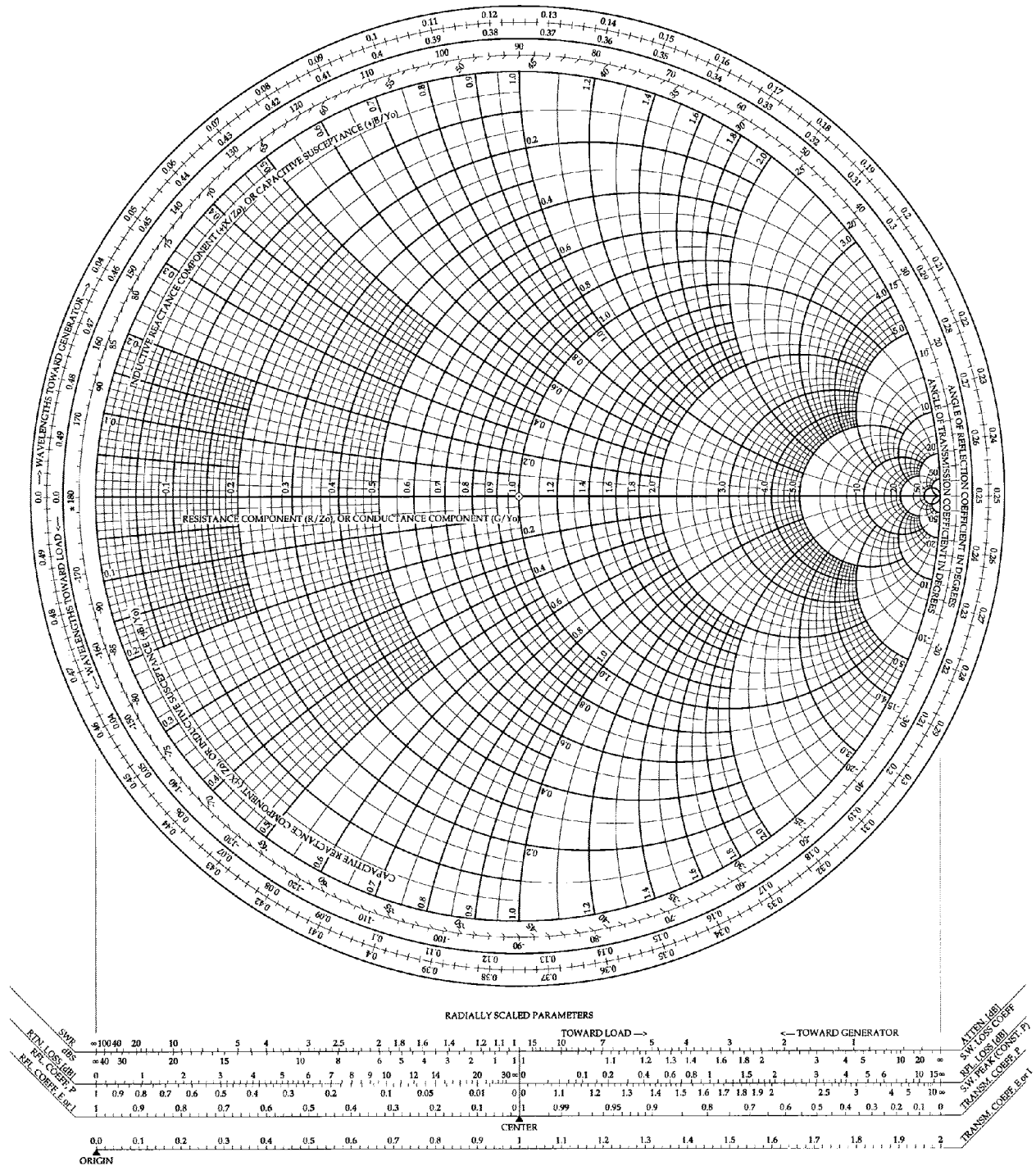
$$|\Gamma| \leq 1$$

$$Z' = Z_K \cdot \frac{1 + \frac{Z - Z_K}{Z + Z_K} \cdot e^{-j2\beta l}}{1 - \frac{Z - Z_K}{Z + Z_K} \cdot e^{-j2\beta l}} = Z_K \cdot \frac{Z \cos(\beta l) + jZ_K \sin(\beta l)}{Z_K \cos(\beta l) + jZ \sin(\beta l)}$$

Kakršnokoli pasivno breme $\text{Re}[Z] = R \geq 0$ ima velikost odbojnosti

$|\Gamma| \leq 1$ vedno manjšo ali enako enoti. Odbojnost kakršnegakoli pasivnega bremena lahko torej prikažemo v kompleksnem diagramu znotraj enotnega kroga! Takšen prikaz odbojnosti imenujemo Smithov diagram. Na Smithovem diagramu imamo pogosto vrisane tudi krivulje za delovni in reaktivni del impedance $Z = R + jX$ oziroma admittance $Y = G + jB$:

Smithov diagram:
impedanca/admittance v merilu odbojnosti



Velikost odbojnosti $|\Gamma|$ pogosto izražamo v logaritemskih enotah. Veličino $\Gamma_{dB} = 20 \cdot \log(|U_O|/|U_N|) = 20 \cdot \log|\Gamma|$ imenujemo tudi prilagoditev ali povratno slabljenje (angleško: Return Loss ali RL).

Komplicirani računi izmeničnih vezij postanejo v Smithovem diagramu silno preprosti. Če med breme in vir vstavimo prenosni vod dolžine l z znano karakteristično impedanco Z_K , se vzdolž voda spreminja samo faza odbojnosti. Bolj točno, odbojnost se zavrti nazaj za dvojni kot $2\beta l$ faze napredujočega oziroma odbitega vala.

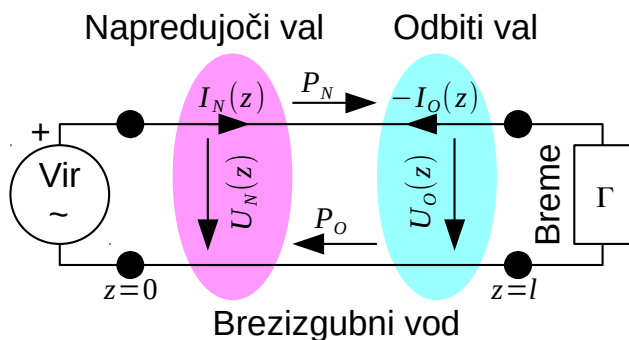
Postopek računanja na brezizgubnem vodu je naslednji. Najprej iz impedance bremena Z določimo odbojnost bremena Γ . Vir vidi preslikano odbojnost $\Gamma' = \Gamma \cdot e^{-j2\beta l}$, kar predstavlja vrtenje odbojnosti v Smithovem diagramu. Končno iz preslikane odbojnosti Γ' izračunamo nazaj preslikano impedanco Z' , ki jo občuti vir.

Celotno preslikavo impedance bremena Z v impedanco Z' , ki jo občuti generator, lahko na brezizgubnem vodu zapišemo s preprosto enačbo. Ko je dolžina voda $l = m \cdot \lambda / 2$ celoštevilski mnogokratnik polovice valovne dolžine, se impedanca preslika v povsem enako vrednost $Z' = Z$. Odbojnost $\Gamma(z)$ naredi takrat celo število polnih krogov v Smithovem diagramu.

Ko je dolžina voda lihi mnogokratnik četrtnine valovne dolžine $l = (2m+1) \cdot \lambda / 4$, se impedanca invertira v $Z' = Z_K^2 / Z$. Invertiranje pomeni zasuk za pol kroga v Smithovem diagramu. Pri invertiranju se kratki stik $Z=0$ preslika v odprte sponke $Z'=\infty$. Velja tudi obratno, odprte sponke se pri invertiranju z vodom dolžine $\lambda/4$ preslikajo v kratek stik.

Vod dolžine $\lambda/4$, ki ima na enem koncu odprte sponke in je na drugem koncu kratko sklenjen, se obnaša kot vzporedni LC nihajni krog uglasen na frekvenco ω . Električni nihajni krog s porazdeljenimi gradniki L/l in C/l imenujemo tudi četrt-valovni rezonator.

Iz napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ na prenosnem vodu izračunamo kompleksno moč P . Kompleksna moč vsebuje delovno moč $\text{Re}[P]$ in jalovo moč $\text{Im}[P]$. Delovna moč natančno ustreza razliki moči napredujočega in odbitega vala $\text{Re}[P] = P_N - P_O$:



$$U(z) = U_N(z) + U_O(z)$$

$$I(z) = I_N(z) + I_O(z)$$

$$\frac{U_N(z)}{I_N(z)} = -\frac{U_O(z)}{I_O(z)} = Z_K = \sqrt{\frac{L/l}{C/l}}$$

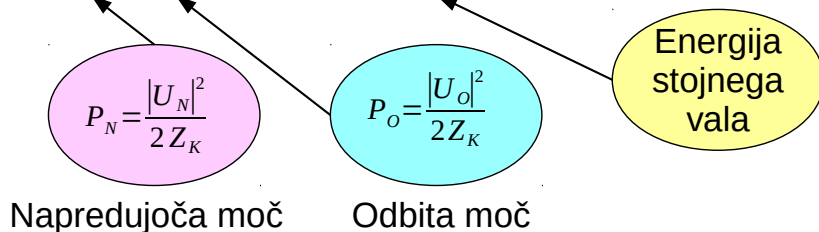
$$P = \frac{U(z) \cdot I(z)^*}{2} = \frac{1}{2} \cdot [U_N(0) \cdot e^{-j\beta z} + U_O(0) \cdot e^{+j\beta z}] \cdot \left[\frac{U_N(0)^*}{Z_K} \cdot e^{+j\beta z} - \frac{U_O(0)^*}{Z_K} \cdot e^{-j\beta z} \right]$$

$$P = \frac{|U_N|^2}{2Z_K} - \frac{|U_O|^2}{2Z_K} + j \frac{|U_N \cdot U_O|}{Z_K} \cdot \sin(2\beta z + \varphi)$$

$$U_N(0) \cdot U_O(0)^* = |U_N \cdot U_O| \cdot e^{-j\varphi}$$

$$U_O(0) \cdot U_N(0)^* = |U_N \cdot U_O| \cdot e^{+j\varphi}$$

Moči valov



$$\text{Re}[P] = P_N - P_O$$

$$P_O = |\Gamma|^2 \cdot P_N$$

$$\text{Re}[P] = P_N \cdot (1 - |\Gamma|^2)$$

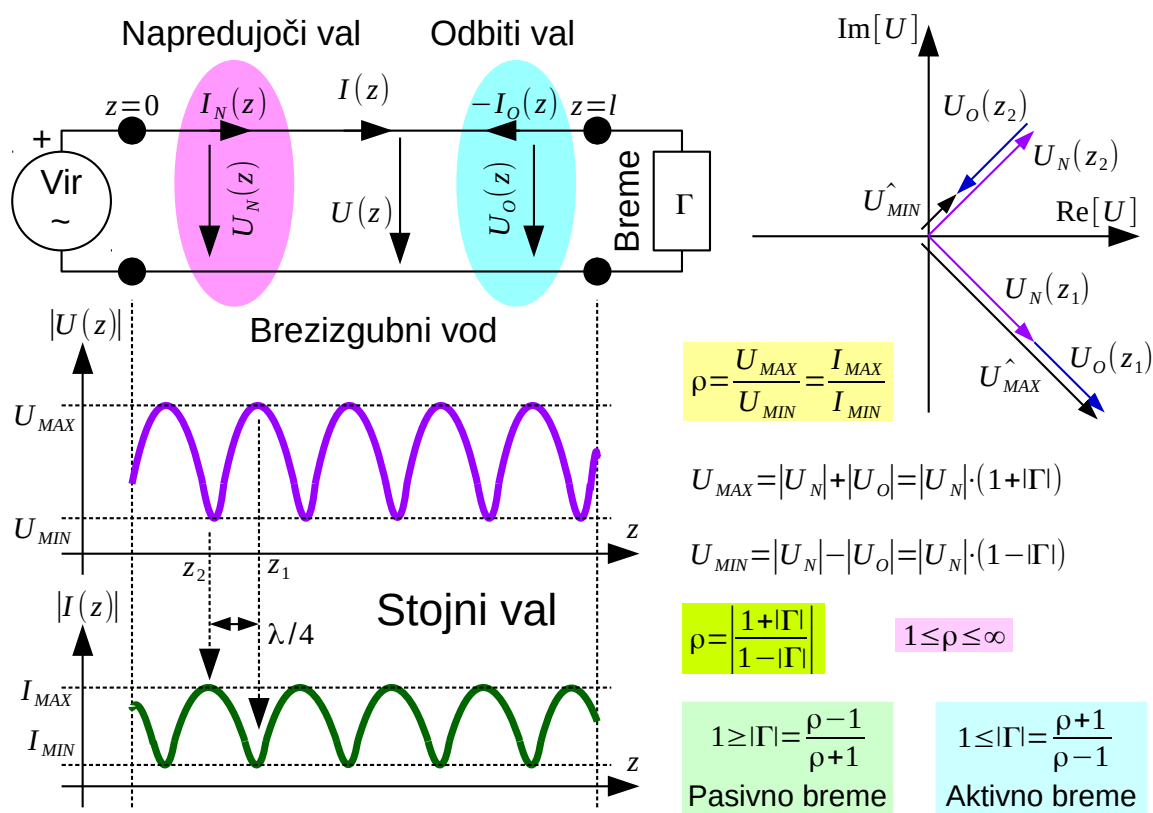
Skupna energija $W = W_N + W_O$ na prenosnem vodu je enaka vsoti energije napredujočega vala in energije odbitega vala. Napetost in tok na prenosnem vodu sta kazalčni vsoti napetosti in tokov posameznih valov. Pripadajoči interferenčni pojav imenujemo stojni val. V stojnem valu višek energije niha naprej-nazaj po prenosnem vodu. Magnetna energija v porazdeljeni induktivnosti L/l se pretvarja v električno energijo v porazdeljeni kapacitivnosti C/l in obratno. Nihajočo energijo opisuje jalova moč $\text{Im}[P]$ na prenosnem vodu.

Stojni val najenostavneje opišemo na brezizgubnem vodu. Kazalca napetosti napredujočega $U_N(z)$ in odbitega $U_O(z)$ vala se na določenih mestih (z_1) sofazno seštevata v U_{MAX} , na nekaterih drugih mestih (z_2) pa protifazno odštevata v U_{MIN} . Razdalja med sosednjima maksimumom in minimumom napetosti $z_1 - z_2 = \lambda/4$ je enaka četrtini valovne dolžine.

Stojni val amplitude napetosti $|U(z)|$ predstavlja ovojnico, pod katero se plazi sinusno valovanje s hitrostjo v od izvora k pasivnemu bremenu. Med plazenjem se amplituda valovanja stalno prilagaja tako, da se valovanje natančno dotika, a nikjer ne seka ovojnice stojnega vala. Ovojnica $|U(z)|$ nima sinusne oblike, minimumi oziroma globeli so ožje, maksimumi

oziroma hrbti pa širši v linearnem merilu za amplitudo.

Če se frekvenca vira ω niti gradniki vezja s časom ne spreminjajo, ostaja ovojnica $|U(z)|$ popolnoma nespremenjena vedno na istem mestu. Od tod ime stojni val:



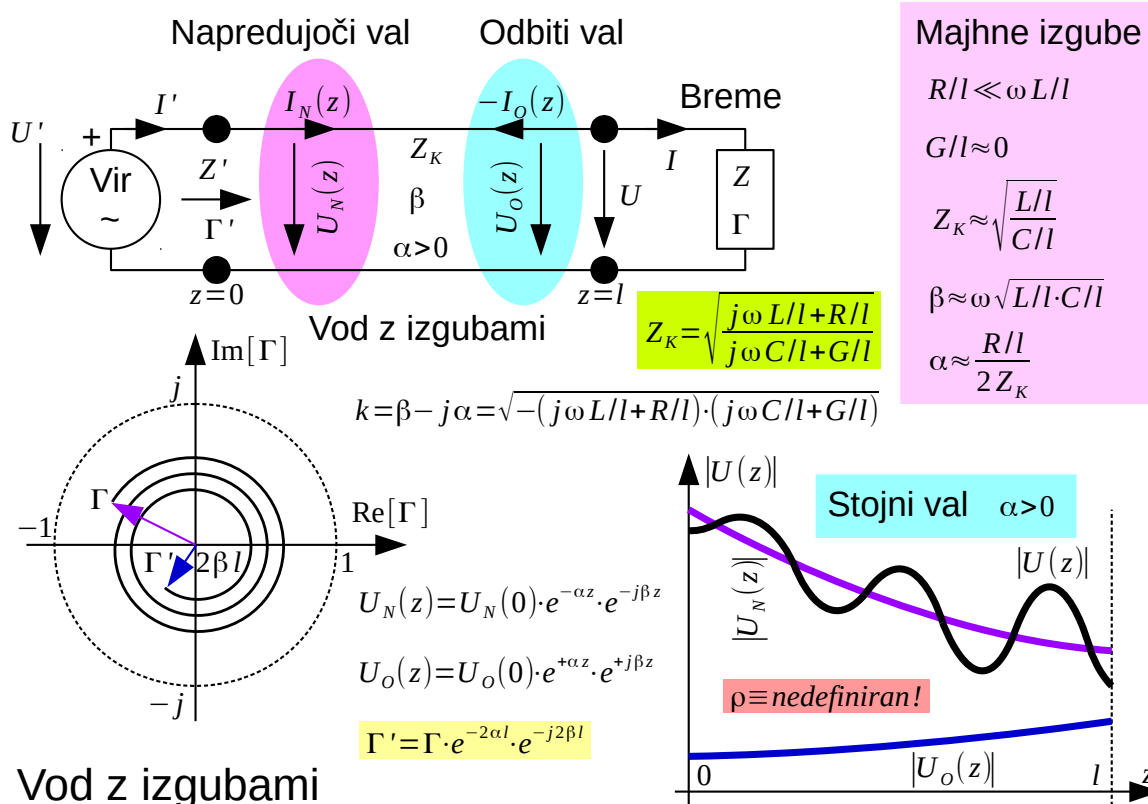
Podoben stojni val kot amplituda napetosti $|U(z)|$ ima tudi amplituda toka $|I(z)|$. Položaji maksimumov toka (z_2) pri tem sovpadajo s položaji minimumov napetosti. Obratno položaji maksimumov napetosti (z_1) sovpadajo s položaji minimumov toka. Energija niha z dvakratno frekvenco 2ω med hrbti toka in hrbti napetosti. Energija se kopiči v obliki magnetne energije v porazdeljeni induktivnosti L/l v okolici hrbtov toka oziroma v obliki električne energije v porazdeljeni kapacitivnosti C/l v okolici hrbtov napetosti.

Na brezizgubnem vodu lahko določimo razmerje stojnega vala (angleško: standing-wave ratio ali SWR) oziroma valovitost $\rho = U_{MAX}/U_{MIN}$ kot razmerje med maksimumom in minimumom iste veličine, amplitude napetosti $|U(z)|$ ali amplitude toka $|I(z)|$. Dodatno se v slovenski literaturi za razmerje stojnega vala ρ uporablja tudi dokaj ponesrečen izraz »neubranost«. Valovitost ρ lahko neposredno izračunamo iz velikosti

odbojnosti $|\Gamma|$. V obratni smeri dobimo iz ρ dve različni (recipročni) vrednosti za $|\Gamma|$ za pasivno oziroma aktivno breme.

Valovitost ρ je sicer neimenovano razmerje, ki se lahko giblje v mejah $1 \leq \rho \leq \infty$. Uporaba veličine ρ je vezana na starodavne merilne pripomočke, ki so neposredno opazovali stojni val na merilnem vodu. Danes je bolj smiselno uporabljati velikost odbojnosti $|\Gamma|$ oziroma vsaj preračunati vanjo rezultat meritve ρ , če že ne znamo izmeriti celotne kompleksne odbojnosti Γ . Pozor, fizikalna veličina valovitost ρ sploh ne obstaja na prenosnih vodih z izgubami!

V resničnem prenosnem vodu moramo upoštevati tudi izgube. Kovinski vodniki dodajajo od nič različno zaporedno upornost $R(\omega)$, ki je funkcija frekvence. Nebrezhibna izolacija dodaja vzporedno prevodnost $G(\omega)$, ki je prav tako funkcija frekvence. Pri eni sami frekvenci ω smemo privzeti, da sta upornost vodnikov na enoto dolžine R/l in prevodnost izolacije na enoto dolžine G/l konstanti:



Resnične vode skušamo graditi tako, da bi bile izgube čim manjše. Dielektrike znamo izdelati zelo dobre, kondenzatorji v sodobnem pomnilniku FLASH zadržijo informacijo tudi 100let! Žal nimamo dobrih prevodnikov, tok v kratko-sklenjeni tuljavi iz bakrene žice se razpolovi že v milisekundi. Celo tok

v zanki iz supra-prevodnika se razpolovi v enem tednu.

V dobro izdelanem prenosnem vodu smemo zanemariti prevodnost izolacije $G/l \approx 0$. Upornost vodnikov R/l je v zanimivem frekvenčnem področju za telekomunikacije $f \geq 1 \text{ MHz}$ za več velikostnih razredov manjša od induktivne reaktance $\omega L/l$. V večini primerov smemo za karakteristično impedanco Z_K in fazno konstanto β uporabiti kar enostavne izraze za brezizgubni vod. Za slabljenje smemo uporabiti približen izraz $\alpha = R/l / (2 Z_K)$.

Na izgubnem prenosnem vodu se spreminjata faza in amplituda odbojnosti $\Gamma(z)$. Napredujoči val $U_N(z)$ je slabljen v smeri $+z$ proti bremenu, odbiti val $U_O(z)$ pa je slabljen v nasprotni smeri $-z$ proti viru. Velikost odbojnosti $|\Gamma(z)|$ je največja na (pasivnem) bremenu in upada proti viru. Kompleksna odbojnost $\Gamma(z)$ tedaj opiše logaritemsko spiralo v Smithovem diagramu. Na resničnem vodu z majhnimi izgubami naredi logaritemska spirala dosti več ovojev in sama spirala je gostejša, kot je to prikazano na sliki!

Preslikavo impedance bremena Z na tisto, kar vidi vir Z' , določimo podobno kot na brezizgubnem vodu. Najprej iz impedance Z izračunamo odbojnost bremena Γ . Nato odbojnost bremena zavrtimo in oslabimo po spirali v Smithovem diagramu do priključka vira

$\Gamma' = \Gamma \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-j2\beta l}$. Končno iz preslikane odbojnosti Γ' izračunamo preslikano impedanco Z' , kar vidi vir.

Tudi na vodu z izgubami se v primeru neprilagojenega bremena $\Gamma \neq 0$ vzpostavi stojni val kot interferenca napredujočega vala $U_N(z)$ in odbitega vala $U_O(z)$. Stojni val ima minimume in maksimume. Tudi na izgubnem vodu velja, da globeli napetosti sovpadajo s hrbti toka in obratno, globeli toka sovpadajo s hrbti napetosti.

Zaradi različnih smeri slabljenja napredujočega vala $e^{-\alpha z}$ v smeri $+z$ oziroma odbitega vala $e^{+\alpha z}$ v smeri $-z$ so hrbti stojnega vala napetosti (toka) načeloma različno visoki. Prav tako so globeli stojnega vala napetosti (toka) različno globoke. Na vodu z izgubami zato razmerje stojnega vala ρ sploh ni določeno!

Stojni val pomeni tudi v primeru voda z izgubami dodatno energijo, ki niha naprej-nazaj po prenosnem vodu. Višek energije pomeni še dodatne

izgube na vodu z izgubami. Neprilagojeno breme $\Gamma \neq 0$ torej pomeni še dodatno slabljenje voda v primerjavi s slabljenjem voda do prilagojenega bremena $\Gamma = 0$. Poleg popačenja signalov zaradi zvonjenja je povečano slabljenje neprilagojenih bremen dodaten razlog za skrbno prilagoditev bremen in virov na karakteristično impedanco voda Z_K .

Rešitev telegrafske enačbe za vod z izgubami v frekvenčnem prostoru nam neposredno daje slabljenje valovanja na enoto dolžine $\alpha = a_{Np}/l$. V primeru dobro prilagojenega vira in bremena je odbiti val zanemarljiv, slabljenje $\alpha = a_{Np}/l$ tedaj kar prestavlja celotno slabljenje voda med virom in bremenom. V praksi nas zanima slabljenje v decibelih na enoto dolžine, torej $a_{dB}/l = \alpha \cdot 20/\ln 10$.

Odbojnost Γ lahko merimo v frekvenčnem prostoru s povsem enakim mostičem kot v časovnem prostoru. Seveda moramo imeti primeren vir in primeren voltmeter. Prav od vrste voltmetra je odvisno, kaj lahko z mostičem merimo. Navaden izmenični voltmeter meri samo amplitudo napetosti, torej z njim lahko izmerimo samo velikost odbojnosti $|\Gamma|$. Kazalčni voltmeter meri amplitudo napetosti in razliko v fazi do neke reference (vira), z njim lahko v celoti izmerimo kompleksno odbojnost Γ .

V ožjem frekvenčnem pasu si lahko privoščimo še drugačna vezja oziroma naprave, ki znajo ločiti med napredujočim in odbitim valom ter vnašajo manjše slabljenje signalov od merilnega mostiča. Zelo pogosta naprava za merjenje odbojnosti v radijski tehniki je smerni sklopnik, bolj natančno protismerni sklopnik.

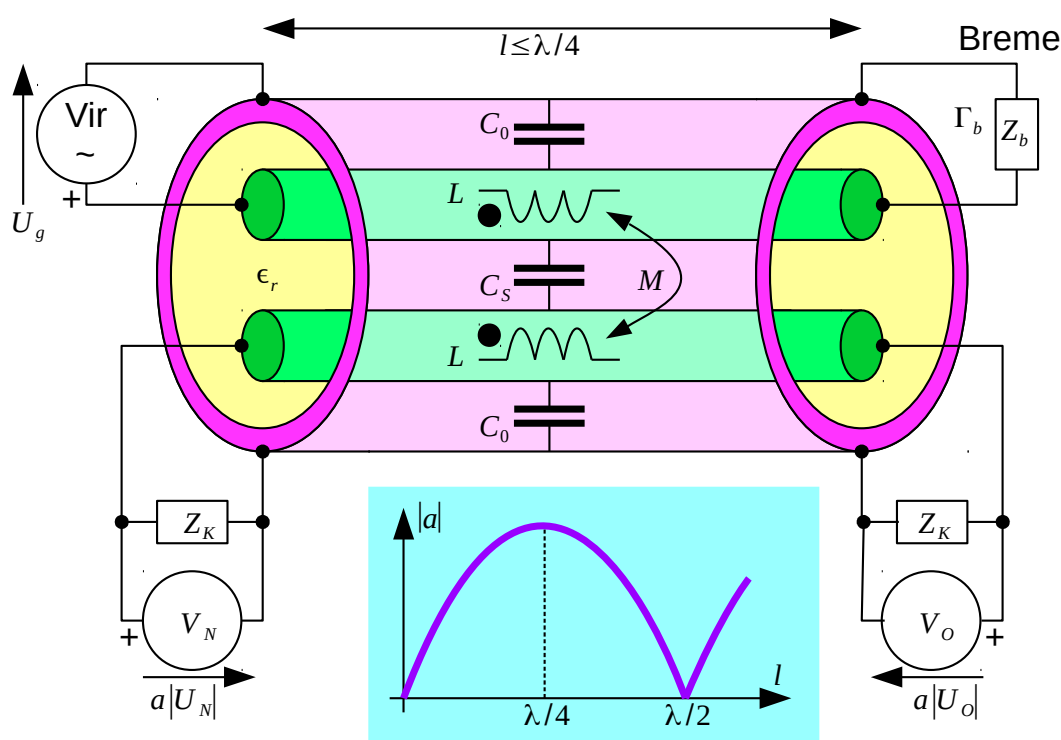
Protismerni sklopnik vsebuje oklop za dva vodnika. Vsak vodnik ima lastno porazdeljeno kapacitivnost C_0 in induktivnost L . Med vodnikoma obstaja magnetni sklop preko porazdeljene medsebojne induktivnosti M in električni sklop preko porazdeljene kapacitivnosti C_s . Dolžina sklopnika je običajno krajša od četrte valovne dolžine $l \leq \lambda/4$.

Medsebojna kapacitivnost C_s in lastna kapacitivnost sklopljenega (spodnjega) voda C_0 delujeta kot kapacitivni merilni delilnik za napetost U na glavnem (gornjem) vodu. Medsebojna induktivnost M deluje kot tokovni merilni transformator za tok I na glavnem (gornjem) vodu.

Kapacitivni merilni delilnik in tokovni merilni transformator sta v protismernem sklopniku vezana tako, da dobimo vsoto oziroma razliko vzorcev napetosti in toka. Primerno utežena vsota $U + Z_K \cdot I$ je sorazmerna

napredujočemu valu. Primerno utežena razlika $U - Z_K \cdot I$ je sorazmerna odbitemu valu.

Medsebojna faza med opisanima magnetnim in električnim sklopom (glej pike pri tuljavah!) je takšna, da se valovanje iz enega (gornjega) vodnika sklaplja v drugi (spodnji) vodnik v obratni smeri potovanja istega valovanja, kar imenujemo protismerni sklop:



Protismerni sklopnik

V smernem sklopniku želimo sklop valovanja samo v eni, znani smeri. V protismernem sklopniku torej želimo samo protismerni sklop in ne želimo sosmernega sklopa. Razmerje med željenim protismernim sklopom in neželjenim sosmernim sklopom imenujemo smernost sklopnika.

Spodnji (sklopljeni) vodnik zaključimo na obeh koncih na njegovo karakteristično impedanco Z_K . Na voltmetrih dobimo napetosti ki so sorazmerne napredujočemu valu $a|U_N|$ in odbitemu valu $a|U_O|$, kjer je a konstanta sklopnika. Slednja je frekvenčno odvisna in doseže največjo vrednost pri dolžini sklopnika $l = \lambda/4$. Homogen dielektrik ϵ_r omogoča preprosto doseganje visoke smernosti, to je popolno izničenje sosmernega sklopa v protismernem sklopniku v širokem frekvenčnem pasu.

Povsem enako kot pri mostiču je tudi pri smernem sklopniku rezultat

meritve odvisen od vrste uporabljenih voltmetrov. Navadna izmenična voltmetra merita samo amplitudi napetosti, torej z njima lahko izmerimo samo velikost odbojnosti $|\Gamma|$. Kazalčni voltmeter meri amplitudi obeh napetosti ter medsebojno fazo, z njim lahko v celoti izmerimo kompleksno odbojnost Γ .

* * * * *

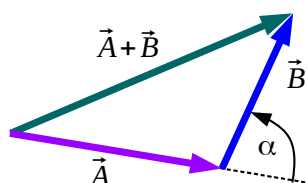
6. Vektorji in koordinate

Povsem natančen opis eno-dimenzijske naloge elektrodinamike je izvedljiv s porazdeljenimi tuljavami, kondenzatorji in upori. Vse veličine vključno s tokovi in napetostmi so skalarne veličine. Skalarno veličino opišemo z enim samim številom, realnim oziroma kompleksnim (kazalec), ki ima določene merske enote. Prave naloge elektrodinamike seveda imajo tri dimenzije v prostoru, kjer opis s skalarnimi veličinami ne zadošča več.

Prave tri-dimenzijske naloge vsebujejo vektorske veličine. Vektor ima velikost in smer. V treh dimenzijah so to tri neodvisna števila s pripadajočimi merskimi enotami, tri realna oziroma tri kompleksna, če nalogo rešujemo v frekvenčnem prostoru in je vektor hkrati tudi kazalec. V izogibanje zmešnjavi vse vektorske veličine vedno označimo s puščico nad črko (imenom), da jih razlikujemo od skalarnih veličin. Isto črko (oznako) brez puščice najpogosteje (ampak ne vedno!) uporabimo za velikost vektorja $A = |\vec{A}|$.

Fizikalne naloge zahtevajo različne računske operacije z vektorji: izračun dolžine (velikosti) vektorja, seštevanje (odštevanje) vektorjev ter dve različni množenji vektorjev:

Seštevanje vektorjev



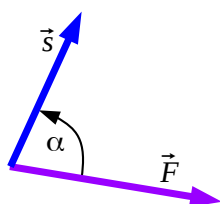
$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

Velikost vektorja



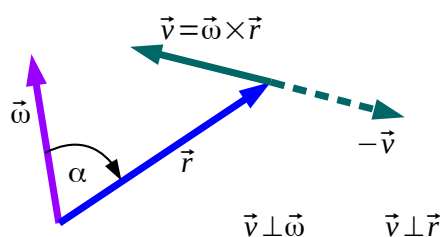
$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$$

Skalarni produkt



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot \vec{F} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\alpha$$

Vektorski produkt



$$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha$$

$$\vec{r} \times \vec{\omega} = -\vec{v} = -\vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{Desni vijak!}$$

Povsem enako kot skalarne veličine moremo med sabo seštevati le vektorje, ki imajo enake merske enote. Velikost vsote dobimo iz kosinusnega izreka, kjer upoštevamo kot med vektorjema α . Smer vsote je vedno med smermi obeh vektorjev, ki smo ju sešteli. Zaporedje vektorjev je pri seštevanju nepomembno.

Skalarni produkt (označen s piko, angleško: dot product) srečamo v številnih fizikalnih nalogah. Na primer, opravljeno delo W je skalar, bolj točno skalarni produkt vektorja sile \vec{F} in vektorja poti \vec{s} . Vmesni kot α določa velikost skalarnega produkta, ki je lahko tudi nič pri $\alpha = \pi/2$ ali celo negativen pri $\alpha > \pi/2$. Pri skalarnem produktu smemo oba vektorja med sabo zamenjati, ker to ne vpliva na rezultat. Skalarni produkt istega vektorja samega s sabo največkrat uporabimo za izračun velikosti vektorja $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$.

Vektorski produkt (označen s križcem, angleško: cross product) srečamo v vseh tri-dimenzijskih nalogah, ki vsebujejo vrtenje, vključno z nalogami magnetike. Na primer, vektorski produkt vektorja krožne frekvence $\vec{\omega}$ in vektorja položaja delca \vec{r} daje vektor hitrosti delca \vec{v} . Od vektorskega produkta zahtevamo, da je pravokoten na oba izvorna vektorja in sorazmeren sinus vmesnega kota α .

Vektor krožne frekvence $\vec{\omega}$ kaže v smeri osi vrtenja. Z upoštevanjem zahteve za pravokotnost ima vektorski produkt \vec{v} še vedno dve možni smeri. Smer vektorskega produkta \vec{v} po definiciji izbiramo po pravilu desnega vijaka. Isto pravilo zahteva, da vektorski produkt zamenja predznak, če zmnožena vektorja med sabo zamenjamo.

Opis fizikalne naloge, ki vsebuje vektorje, je lahko zelo zahteven. Težko je že določiti kot α med dvema vektorjema. Še težje je določiti, kam kaže vsota dveh vektorjev. Najbolj zoprna naloga je vsekakor določanje smeri vektorskega produkta.

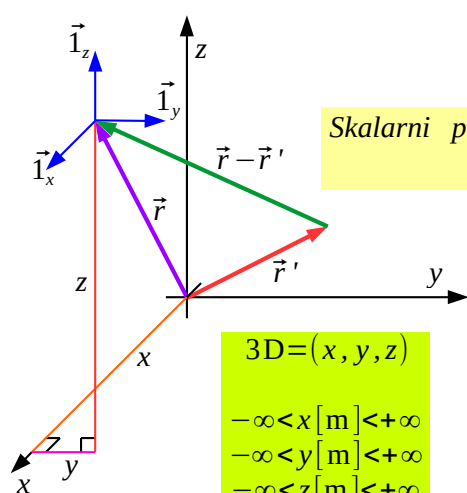
V izogibanje zmešnjavi pri opisu fizikalne naloge (elektrodinamike) je smiselno uvesti koordinatni sistem. Primeren koordinatni sistem naj bi imel naslednje lastnosti, da poenostavi opis in računanje z vektorji:

- 1) tri dimenzije (3D),
- 2) pravokotnost med koordinatnimi osmi (pravokotni) in
- 3) vgrajeno pravilo desnega vijaka (desnoročni).

Koordinatni sistem je izumil francoski matematik René Descartes leta

1637, da je z njim povezal algebro in geometrijo. Najpreprostejši koordinatni sistem, ki ustreza gornjim zahtevam, je tri-dimenzijski kartezični (latinizirano ime Descartes) koordinatni sistem:

Kartezične koordinate



Komponente $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = \vec{i}_x A_x + \vec{i}_y A_y + \vec{i}_z A_z$
 $A_x = \vec{i}_x \cdot \vec{A}$ $A_y = \vec{i}_y \cdot \vec{A}$ $A_z = \vec{i}_z \cdot \vec{A}$

Skalarni produkt $\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{i}_x A_x + \vec{i}_y A_y + \vec{i}_z A_z) \cdot (\vec{i}_x B_x + \vec{i}_y B_y + \vec{i}_z B_z)$
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Velikost $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$
 $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Razdalja $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$

Vektorski produkt
 $\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{i}_x A_x + \vec{i}_y A_y + \vec{i}_z A_z) \times (\vec{i}_x B_x + \vec{i}_y B_y + \vec{i}_z B_z)$
 $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{i}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{i}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{i}_z (A_x B_y - A_y B_x)$

Smerniki $1 = \vec{i}_x \cdot \vec{i}_x = \vec{i}_y \cdot \vec{i}_y = \vec{i}_z \cdot \vec{i}_z$

Pravokotni $\vec{i}_x \perp \vec{i}_y \perp \vec{i}_z \perp \vec{i}_x$ $0 = \vec{i}_x \cdot \vec{i}_y = \vec{i}_y \cdot \vec{i}_z = \vec{i}_z \cdot \vec{i}_x$

Desnoročni $\vec{i}_z = \vec{i}_x \times \vec{i}_y$ $\vec{i}_x = \vec{i}_y \times \vec{i}_z$ $\vec{i}_y = \vec{i}_z \times \vec{i}_x$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

V kartezičnem koordinatnem sistemu so vse tri koordinatne osi x , y in z ravne in med sabo pravokotne. Vse tri koordinate imajo merske enote razdalje, torej metri [m] v sistemu merskih enot MKSA. Pravilo desnega vijaka zagotavlja pisanje koordinat v dogovorjenem vrstnem redu, torej (x, y, z) .

Zelo koristen pripomoček vsakega koordinatnega sistema so smerniki. To so enotni vektorji, ki kažejo v smereh koordinatnega sistema. V izogibanje zmešnjavi razkošja oznak uporabljamo za smernike številko ena, opremljeno s puščico vektorja in indeksom koordinate, kateri pripada. Na primer, smernik \vec{i}_x je enotni vektor v smeri koordinate x .

Smerniki so enotni vektorji, torej $\vec{i}_x \cdot \vec{i}_x = 1$. Smerniki so v pravokotnem koordinatnem sistemu med sabo pravokotni. Zapis $\vec{i}_x \perp \vec{i}_y$ je torej povsem enakovreden $\vec{i}_x \cdot \vec{i}_y = 0$. Pravilo desnega vijaka zapišemo z vektorskim produktom smernikov $\vec{i}_z = \vec{i}_x \times \vec{i}_y$.

Posebnost kartezičnega koordinatnega sistema je, da so smerniki konstantni vektorji. To pomeni, da v katerikoli točki prostora vsi trije smerniki kartezičnega koordinatnega sistema vedno kažejo v iste tri smeri. V krivočrtnih koordinatnih sistemih, ki so prav tako 3D, pravokotni in desnoročni, to ne velja! Konstantni smerni vektorji in koordinate z merskimi enotami razdalje omogočajo preprost izračun razdalj v kartezičnem koordinatnem sistemu.

S pomočjo smernikov lahko katerikoli vektor razstavimo v treh dimenzijah v tri skalarne komponente. Obratno iz treh skalarnih komponent s pomočjo smernikov dobimo spet prvotni vektor. Zapis vektorja po komponentah znatno poenostavlja računanje z vektorji. Seštevanje dveh vektorjev gre preprosto tako, da seštejemo istoležne komponente.

Skalarni produkt dveh vektorjev razvijemo v devet produktov komponent. Od teh je v pravokotnem koordinatnem sistemu šest produktov enako nič! V skalarnem produktu so različni od nič le trije produkti istoležnih komponent, ki jih preprosto seštejemo.

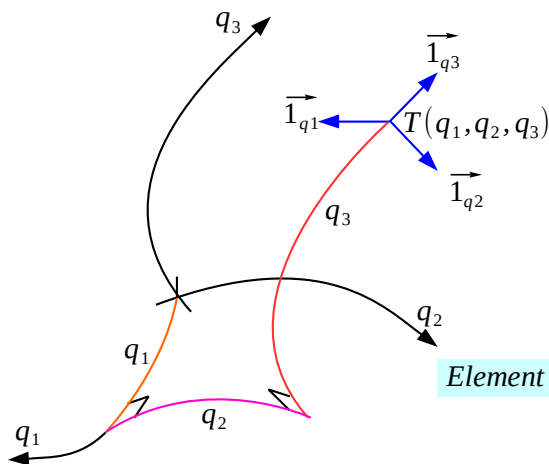
Tudi vektorski produkt dveh vektorjev razvijemo v devet produktov komponent. Od teh so v vektorskem produktu trije produkti istoležnih komponent enaki nič. Ostalih šest od nič različnih produktov komponent izračunamo s pomočjo pravila desnega vijaka za smernike. Navidez kompliciran končni rezultat poenostavimo z zapisom vektorskega produkta v obliki determinante 3×3 , ki ima v gornji vrstici smernike, v srednji vrstici komponente prvega vektorja in v spodnji vrstici komponente drugega vektorja.

Žal kartezične koordinate (x, y, z) niso najbolj primerne za reševanje nekaterih nalog niti niso v izbrani nalogi samoumevne. Marsikatero nalogo preprosteje opišemo v krivočrtnem koordinatnem sistemu s splošnimi koordinatami q_1 , q_2 in q_3 . Krivočrtni koordinatni sistem (q_1, q_2, q_3) sicer izberemo 3D, pravokoten in desnoročen, vendar koordinatne osi mogoče niso vse ravne niti koordinate nimajo nujno vse merskih enot razdalje.

Smernik ima smer tangente na pripadajočo koordinatno os krivočrtnega koordinatnega sistema. Če je koordinatna os ukrivljena oziroma se njena smer spreminja v prostoru, se spreminja smer tangente. Smernik takrat ni konstanten vektor, pač pa je funkcija koordinat (q_1, q_2, q_3) ! Poljuben 3D krivočrtni koordinatni sistem (q_1, q_2, q_3) ima smernike $\vec{1}_{q_1}$, $\vec{1}_{q_2}$ in

$\vec{1}_{q_3}$, ki so med sabo pravokotni in določajo pravilo desnega vijaka:

Krivočrtne koordinate



$$3D = (q_1, q_2, q_3)$$

Enotni vektorji $1 = \vec{1}_{q_1} \cdot \vec{1}_{q_1} = \vec{1}_{q_2} \cdot \vec{1}_{q_2} = \vec{1}_{q_3} \cdot \vec{1}_{q_3}$

Pravokotni $\vec{1}_{q_1} \perp \vec{1}_{q_2} \perp \vec{1}_{q_3} \perp \vec{1}_{q_1} \quad 0 = \vec{1}_{q_1} \cdot \vec{1}_{q_2} = \vec{1}_{q_2} \cdot \vec{1}_{q_3} = \vec{1}_{q_3} \cdot \vec{1}_{q_1}$

Desnoročni $\vec{1}_{q_3} = \vec{1}_{q_1} \times \vec{1}_{q_2} \quad \vec{1}_{q_1} = \vec{1}_{q_2} \times \vec{1}_{q_3} \quad \vec{1}_{q_2} = \vec{1}_{q_3} \times \vec{1}_{q_1}$

Element dolžine $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

Povezava s kartezičnimi

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$

$$dl_1 = \left(\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2} \right) dq_1 = h_1 dq_1$$

Element površine $dA = dl_1 dl_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2$

Element prostornine $dV = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2}$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2} \right)^2}$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3} \right)^2}$$

V krivočrtnem koordinatnem sistemu se zaplete pri izračunu katerekoli razdalje, celo diferencialno majhnih premikov. Za izračun poljubne razdalje moramo krivočrtne koordinate (q_1, q_2, q_3) največkrat pretvoriti v kartezične koordinate (x, y, z) . Pri majhnih premikih pogosto smemo ubrati bližnjico, primeren faktor, ki majhno spremembo ene od krivočrtnih koordinat pretvori v pripadajočo razdaljo.

Izračun faktorja pretvorbe majhne spremembe v razdaljo ni vedno preprost oziroma samoumeven. Francoski matematik Gabriel Lamé je pri reševanju nalog v eliptičnih koordinatnih sistemih leta 1859 poiskal splošno pot do faktorjev pretvorbe za diferencialno majhne premike. Laméjevi koeficienti (angleško: scale factors) h_1 , h_2 in h_3 opisujejo pretvorbo diferencialno majhne spremembe ene od koordinat, na primer dq_1 v pripadajočo razdaljo $dl_1 = h_1 dq_1$.

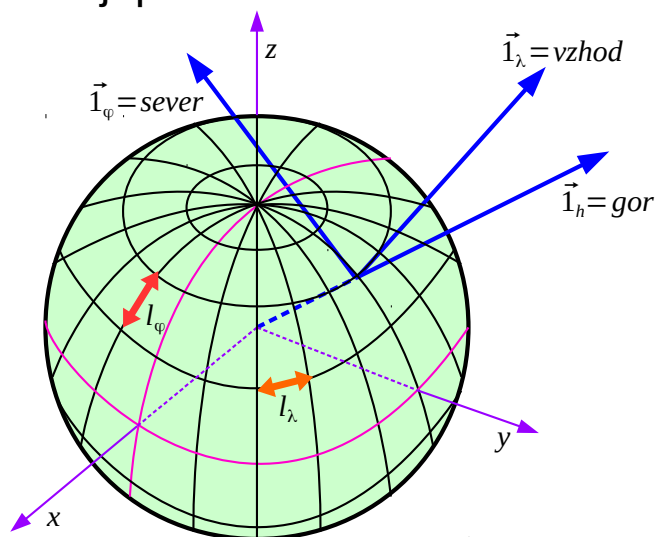
Laméjev koeficient h_1 izračunamo iz delnih odvodov vseh treh kartezičnih koordinat $\partial x / \partial q_1$, $\partial y / \partial q_1$ in $\partial z / \partial q_1$ po pripadajoči krivočrtni koordinati. Premik po eni krivočrtni koordinati načeloma povzroči premike po vseh treh kartezičnih koordinatah. Celotno razdaljo premika

dobimo s Pitagorovim izrekom. Če izpostavimo dq_1 , je preostanek ravno iskani Laméjev koeficient h_1 .

V diferencialno majhnem elementu dolžine dl nastopa en sam Laméjev koeficient. V diferencialno majhnem elementu površine dA nastopata dva Laméjeva koeficienta. V diferencialno majhnem elementu prostornine dV nastopajo vsi trije Laméjevi koeficienti h_1 , h_2 in h_3 .

Najbolj poljuden primer 3D pravokotnih krivočrtnih koordinat so zemljepisne koordinate: zemljepisna dolžina λ , zemljepisna širina φ in nadmorska višina h . Zemljepisno dolžino in širino merimo v ločnih stopinjah $[^\circ]$, minutah $[']$ in sekundah $[']$, nadmorsko višino pa v kilometrih $[km]$ oziroma metrih $[m]$. Smernik $\vec{1}_\lambda$ kaže na vzhod, smernik $\vec{1}_\varphi$ kaže na sever in smernik $\vec{1}_h$ kaže gor:

Zemljepisne koordinate



Pretvorba $(\lambda, \varphi, h) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = (h + R_Z) \cos\left(\frac{\pi}{180^\circ} \lambda\right) \cos\left(\frac{\pi}{180^\circ} \varphi\right)$$

$$y = (h + R_Z) \sin\left(\frac{\pi}{180^\circ} \lambda\right) \cos\left(\frac{\pi}{180^\circ} \varphi\right)$$

$$z = (h + R_Z) \sin\left(\frac{\pi}{180^\circ} \varphi\right)$$

$$R_Z \approx 6366 \text{ km}$$

Laméjevi koeficienti

$$h_\lambda = \frac{\pi(h + R_Z)}{180^\circ} \cos\left(\frac{\pi}{180^\circ} \varphi\right)$$

$$h_\varphi = \frac{\pi(h + R_Z)}{180^\circ}$$

$$h_h = 1$$

$$3D = (\lambda, \varphi, h)$$

$$\begin{aligned} 0^\circ &\leq \lambda [^\circ] < 360^\circ \\ -90^\circ &\leq \varphi [^\circ] \leq 90^\circ \\ -R_Z &\leq h [km] < +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Pravokotni } \vec{1}_\lambda \perp \vec{1}_\varphi \perp \vec{1}_h \perp \vec{1}_\lambda$$

$$\text{Desnoročni } \vec{1}_h = \vec{1}_\lambda \times \vec{1}_\varphi$$

$$\text{Zgled: } \lambda = 330^\circ \quad \varphi = 45^\circ \quad h = 0 \text{ km}$$

$$h_\lambda = 78.6 \text{ km/}^\circ$$

$$h_\varphi = 111.1 \text{ km/}^\circ$$

$$h_h = 1$$

$$\Delta \lambda = 20^\circ \rightarrow l_\lambda = h_\lambda \Delta \lambda = 1571 \text{ km}$$

$$\Delta \varphi = 20^\circ \rightarrow l_\varphi = h_\varphi \Delta \varphi = 2222 \text{ km}$$

Pretvorbo zemljepisnih koordinat (λ, φ, h) v kartezične (x, y, z) poenostavimo tako, da privzamemo, da je Zemlja krogla s povprečnim polmerom $R_Z \approx 6366 \text{ km}$. Pri pretvorbi ne smemo pozabiti na merske enote zemljepisne dolžine in širine, kjer je treba stopinje $[^\circ]$ najprej pretvoriti v radiane $[rd]$ za trigonometrijske funkcije \sin in \cos . Iz znane povezave s kartezičnim koordinatnim sistemom lahko izračunamo

Laméjeve koeficiente h_λ , h_φ in h_h .

V krivočrtnem koordinatnem sistemu so smerniki funkcija koordinat. Na primer, smernik $\vec{1}_h = \text{gor}$ kaže v osrednji Evropi drugam kot na Kitajskem, v Novi Zelandiji pa skoraj v obratno smer kot v osrednji Evropi.

Podobno so lahko funkcija krivočrtnih koordinat tudi nekateri oziroma vsi Laméjevi koeficienti. Prekooceanska plovba ($h=0$ km) po poldnevniku ima konstanten Laméjev koeficient zemljepisne širine $h_\varphi = 111.1 \text{ km}/^\circ$. Laméjev koeficient zemljepisne dolžine h_λ je odvisen od zemljepisne širine φ , saj so vzporedniki različno dolgi. Pri zemljepisni širini $\varphi = 45^\circ$ znaša $h_\lambda = 78.6 \text{ km}/^\circ$.

Med premikanjem po kateremkoli poldnevniku za $\Delta\varphi = 20^\circ$ prepluje ladja $l_\varphi = 2222 \text{ km}$ oziroma natančno $l_\varphi = 20^\circ \cdot 60 \text{ nm}/^\circ = 1200 \text{ nm}$, saj je navtična milja definirana kot ena ločna stopinja na poldnevniku. Pripadajoči Laméjev koeficient znaša $h_\varphi = 1 \text{ nm}/' = 1.852 \text{ km}/'$ zapisan na ločno minuto. Med plovbo po vzporedniku 45°N za $\Delta\lambda = 20^\circ$ naredi ladja samo $l_\lambda = 1571 \text{ km}$!

V elektrodinamiki izbiramo koordinatne sisteme tako, da je računanje čimbolj enostavno. Povsem jasno želimo tri dimenzije, pravokotnost in desnoročnost. Vse kotne koordinate zato navajamo v radianih $[\text{rd}]$, da so odvodi in integrali kotnih funkcij čimbolj preprosti. Iz podobnega razloga navajamo eksponentne koordinate v logaritemskih enotah Neprih $[\text{Np}]$, da so odvodi in integrali hiperboličnih funkcij čimbolj preprosti.

Valjni koordinatni sistem (ρ, φ, z) je smiselna izbira za obravnavo vodnikov krožnega prereza, koaksialnih kablov, kovinskih valovodov krožnega prereza in dielektričnih valovodov krožnega prereza (svetlobno vlakno). Valjne koordinate vključujejo oddaljenost ρ od kartezične osi z , kot φ merjen od kartezične osi x do projekcije na ravnino xy ter višino z nad ravnino xy , ki povsem ustreza enako poimenovani kartezični koordinati z .

Oddaljenost ρ od osi zapisujemo v metrih $[\text{m}]$ in vedno vzamemo pozitivno $0 \leq \rho < +\infty$. Kot φ zapisujemo v radianih $[\text{rd}]$ in se lahko giblje v območju $0 \leq \varphi < 2\pi$. Pozor, koordinata φ valjnega koordinatnega sistema nima popolnoma nobene povezave z istoimensko koordinato φ zemljepisnega koordinatnega sistema! Povsem enako kot v kartezičnem

koordinatnem sistemu tretjo koordinato z zapisujemo v metrih $[m]$ in za njeno vrednost ni posebnih omejitev:

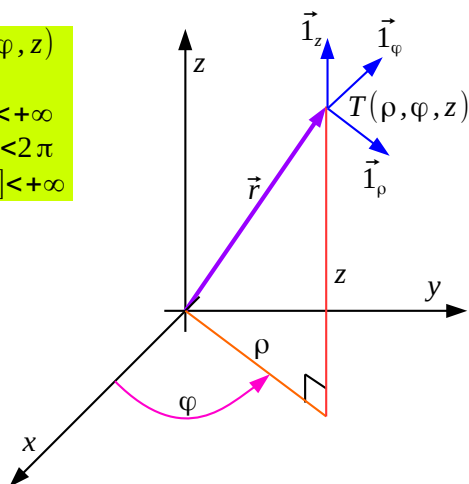
Valjne koordinate

$$3D = (\rho, \varphi, z)$$

$$0 \leq \rho [m] < +\infty$$

$$0 \leq \varphi [rd] < 2\pi$$

$$-\infty < z [m] < +\infty$$



Smerniki $1 = \vec{1}_\rho \cdot \vec{1}_\rho = \vec{1}_\varphi \cdot \vec{1}_\varphi = \vec{1}_z \cdot \vec{1}_z$

Pravokotni $\vec{1}_\rho \perp \vec{1}_\varphi \perp \vec{1}_z \perp \vec{1}_\rho$ $0 = \vec{1}_\rho \cdot \vec{1}_\varphi = \vec{1}_\varphi \cdot \vec{1}_z = \vec{1}_z \cdot \vec{1}_\rho$

Desnoročni $\vec{1}_z = \vec{1}_\rho \times \vec{1}_\varphi$ $\vec{1}_\rho = \vec{1}_\varphi \times \vec{1}_z$ $\vec{1}_\varphi = \vec{1}_z \times \vec{1}_\rho$

Pretvorba $(\rho, \varphi, z) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$\vec{1}_x = \vec{1}_\rho \cos \varphi - \vec{1}_\varphi \sin \varphi$$

$$\vec{1}_y = \vec{1}_\rho \sin \varphi + \vec{1}_\varphi \cos \varphi$$

$$\vec{1}_z = \vec{1}_z$$

Laméjevi koeficienti

$$h_\rho = 1$$

$$h_\varphi = \rho$$

$$h_z = 1$$

Pretvorba $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z)$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan(y/x) \quad (\text{kvadrant?})$$

$$z = z$$

$$\vec{1}_\rho = \vec{1}_x \cos \varphi + \vec{1}_y \sin \varphi$$

$$\vec{1}_\varphi = -\vec{1}_x \sin \varphi + \vec{1}_y \cos \varphi$$

$$\vec{1}_z = \vec{1}_z$$

V valjnem koordinatnem sistemu (ρ, φ, z) sta koordinatni osi ρ in z ravni (premici). Le koordinatna os φ je ukrivljena (krožnica). Laméjev koeficient $h_\varphi = \rho$ je edini, ki je različen od enote, da radiane pretvori v dolžinske enote. Ostala dva Laméjeva koeficienta $h_\rho = h_z = 1$ sta enaka enoti.

Pravilo desnega vijaka določa privzeti vrstni red koordinat (ρ, φ, z) oziroma vektorski produkt smernikov $\vec{1}_z = \vec{1}_\rho \times \vec{1}_\varphi$. V valjnem koordinatnem sistemu je edino smernik $\vec{1}_z$ konstanten vektor. Smernika $\vec{1}_\rho$ in $\vec{1}_\varphi$ spreminjata smer v prostoru, bolj točno se oba vrtita s koordinato φ .

Pretvorba valjnih koordinat (ρ, φ, z) v kartezične (x, y, z) je preprosta. Pretvorba v obratni smeri iz kartezičnih (x, y, z) v valjne (ρ, φ, z) naleti na težavo pri izračunu φ , saj funkcija $\arctan(y/x)$ daje rezultat v območju od $-\pi/2$ do $+\pi/2$. Pravilen kvadrant kota φ je torej treba še dodatno določiti iz znanih x in y !

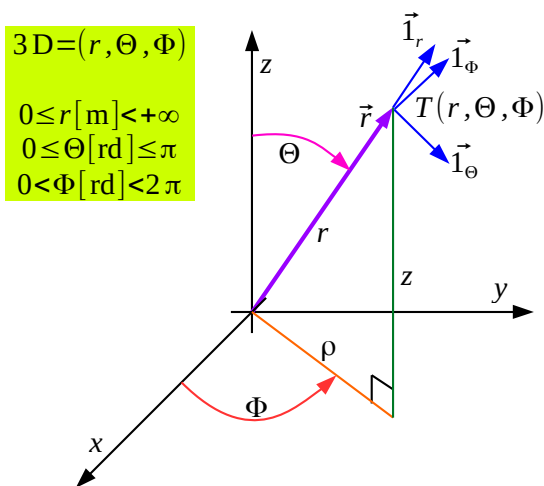
Povezavo med smerniki valjnega in kartezičnega koordinatnega sistema

poiščemo tako, da iskani smernik razstavimo na komponente. Na primer, pri iskanju smernika $\vec{1}_\rho = \vec{1}_x(\vec{1}_x \cdot \vec{1}_\rho) + \vec{1}_y(\vec{1}_y \cdot \vec{1}_\rho) + \vec{1}_z(\vec{1}_z \cdot \vec{1}_\rho)$ potrebujemo projekcije $\vec{1}_x \cdot \vec{1}_\rho = \cos \varphi$, $\vec{1}_y \cdot \vec{1}_\rho = \sin \varphi$ in $\vec{1}_z \cdot \vec{1}_\rho = 0$. Smernik $\vec{1}_z$ poznamo, saj je isti v obeh koordinatnih sistemih. Preostalo neznanko, smernik $\vec{1}_\varphi = \vec{1}_z \times \vec{1}_\rho$ poiščemo po pravilu desnega vijaka.

Krogelni koordinatni sistem (r, Θ, Φ) je uporaben v vseh nalogah anten, sevanja in razširjanja elektromagnetnih valov. Krogelne koordinate vključujejo oddaljenost r od koordinatnega izhodišča, polarno razdaljo zapisano s kotom Θ ter zemljepisno dolžino zapisano s kotom Φ , ki z izjemo drugačnih merskih enot povsem ustreza zemljepisni dolžini λ zemljepisnih koordinat.

Oddaljenost r od koordinatnega izhodišča zapisujemo v metrih [m] in vedno vzamemo pozitivno $0 \leq r < +\infty$. Polarno razdaljo Θ merimo od severnega tečaja vadianih [rd] in se lahko giblje v območju $0 \leq \Theta \leq \pi$ vse do južnega tečaja, kjer doseže vrednost $\Theta = \pi$. Zemljepisno dolžino Φ merimo od kartezične osi x do projekcije na ravnino xy vadianih [rd] in se lahko giblje v območju $0 \leq \Phi < 2\pi$:

Krogelne koordinate



$$3D = (r, \Theta, \Phi)$$

$$0 \leq r[\text{m}] < +\infty$$

$$0 \leq \Theta[\text{rd}] \leq \pi$$

$$0 < \Phi[\text{rd}] < 2\pi$$

Pretvorba $(r, \Theta, \Phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = r \sin \Theta \cos \Phi$$

$$y = r \sin \Theta \sin \Phi$$

$$z = r \cos \Theta$$

$$\vec{1}_x = \vec{1}_r \sin \Theta \cos \Phi + \vec{1}_\Theta \cos \Theta \cos \Phi - \vec{1}_\Phi \sin \Phi$$

$$\vec{1}_y = \vec{1}_r \sin \Theta \sin \Phi + \vec{1}_\Theta \cos \Theta \sin \Phi + \vec{1}_\Phi \cos \Phi$$

$$\vec{1}_z = \vec{1}_r \cos \Theta - \vec{1}_\Theta \sin \Theta$$

Pretvorba $(x, y, z) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

$$\Phi = \arctan(y/x) \quad (\text{kvadrant?})$$

$$\vec{1}_r = \vec{1}_x \sin \Theta \cos \Phi + \vec{1}_y \sin \Theta \sin \Phi + \vec{1}_z \cos \Theta$$

$$\vec{1}_\Theta = \vec{1}_x \cos \Theta \cos \Phi + \vec{1}_y \cos \Theta \sin \Phi - \vec{1}_z \sin \Theta$$

$$\vec{1}_\Phi = -\vec{1}_x \sin \Phi + \vec{1}_y \cos \Phi$$

Smerniki $\vec{1}_r \cdot \vec{1}_r = \vec{1}_\Theta \cdot \vec{1}_\Theta = \vec{1}_\Phi \cdot \vec{1}_\Phi = 1$

Pravokotni $\vec{1}_r \perp \vec{1}_\Theta \perp \vec{1}_\Phi \perp \vec{1}_r$ $0 = \vec{1}_r \cdot \vec{1}_\Theta = \vec{1}_\Theta \cdot \vec{1}_\Phi = \vec{1}_\Phi \cdot \vec{1}_r$

Desnoročni $\vec{1}_\Phi = \vec{1}_r \times \vec{1}_\Theta$ $\vec{1}_r = \vec{1}_\Theta \times \vec{1}_\Phi$ $\vec{1}_\Theta = \vec{1}_\Phi \times \vec{1}_r$

Laméjevi koeficienti

$$h_r = 1$$

$$h_\Theta = r$$

$$h_\Phi = r \sin \Theta$$

V krogelnem koordinatnem sistemu (r, Θ, Φ) je edino koordinatna

os r ravna (premica). Ostali dve koordinatni osi sta ukrivljeni (krožnici):

Θ raste po poldnevnikih proti južnemu tečaju, Φ raste po vzporednikih na vzhod. Laméjev koeficient $h_r=1$ je edini enak enoti. Ostala dva Laméjeva koeficienta $h_\Theta=r$ in $h_\Phi=r \sin \Theta$ sta različna od enote, da radiane pretvarjata v dolžinske enote.

Pravilo desnega vijaka določa privzeti vrstni red koordinat (r, Θ, Φ) oziroma vektorski produkt smernikov $\vec{1}_\Phi = \vec{1}_r \times \vec{1}_\Theta$. V krogelnem koordinatnem sistemu vsi trije smerniki $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\Theta$ in $\vec{1}_\Phi$ spreminjajo smer v prostoru, bolj točno se obračajo s polarno razdaljo Θ oziroma zemljepisno dolžino Φ .

Pretvorba krogelnih koordinat (r, Θ, Φ) v kartezične (x, y, z) je preprosta. Pretvorba v obratni smeri iz kartezičnih (x, y, z) v krogelne (r, Θ, Φ) naleti na težavo pri izračunu Φ , saj funkcija $\arctan(y/x)$ daje rezultat v območju od $-\pi/2$ do $+\pi/2$. Pravilen kvadrant kota Φ je torej treba še dodatno določiti iz znanih x in y ! Povrhu lahko postane izračun polarne razdalje Θ preko funkcije \arccos zelo nenatančen v bližini tečajev!

Zemljepisna dolžina krogelnega koordinatnega sistema je povsem enaka $\Phi(krogla) = \varphi(valj)$ koordinati valjnega koordinatnega sistema. Tudi pripadajoča smerna vektorja sta povsem enaka $\vec{1}_\Phi(krogla) = \vec{1}_\varphi(valj)$. Različni oznaki, veliko in malo grško črko »Phi« uporabljamo le zato, da strogo ločimo med krogelnimi koordinatami (r, Θ, Φ) in valjnimi koordinatami (ρ, φ, z) .

Povezavo med smerniki krogelnega in kartezičnega koordinatnega sistema poiščemo tako, da iskani smernik razstavimo na komponente. Na primer, pri iskanju smernika $\vec{1}_r = \vec{1}_x(\vec{1}_x \cdot \vec{1}_r) + \vec{1}_y(\vec{1}_y \cdot \vec{1}_r) + \vec{1}_z(\vec{1}_z \cdot \vec{1}_r)$ potrebujemo projekcije $\vec{1}_x \cdot \vec{1}_r = \sin \Theta \cos \Phi$, $\vec{1}_y \cdot \vec{1}_r = \sin \Theta \sin \Phi$ in $\vec{1}_z \cdot \vec{1}_r = \cos \Theta$. Smernik $\vec{1}_\Phi = \vec{1}_\varphi(valj) = -\vec{1}_x \sin \Phi + \vec{1}_y \cos \Phi$ poznamo, saj je isti vektor kot v valjnem koordinatnem sistemu. Preostalo neznanko, smernik $\vec{1}_\Theta = \vec{1}_\Phi \times \vec{1}_r$ poiščemo po pravilu desnega vijaka.

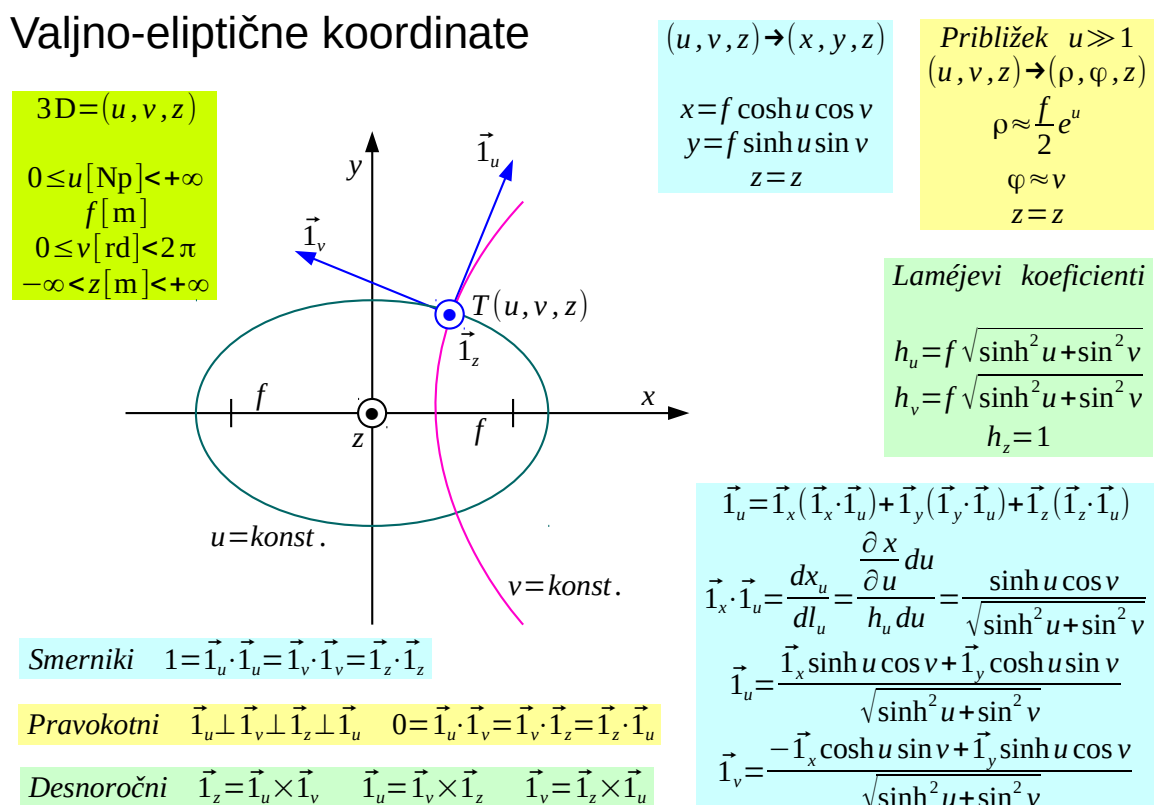
Opisani poenostavljeni zemljepisni koordinatni sistem je podoben krogelnemu z nekaj preprostimi pretvorbami koordinat. Nadmorski višini prištejemo polmer Zemlje $h(zemljepis) + R_z = r(krogla)$. Zemljepisno dolžino samo pretvorimo v radiane $\lambda(zemljepis) \cdot \pi/180^\circ = \Phi(krogla)$.

Zemljepisno širino pretvorimo v radiane in odštejemo od pravega kota $\pi/2 - \varphi(\text{zemljepis}) \cdot \pi/180^\circ = \Theta(\text{krogla})$, da dobimo pripadajočo polarno razdaljo.

Valjno-eliptični koordinatni sistem (u, v, z) je smiselna izbira za obravnavo osamljenih trakastih vodnikov oziroma kovinskega valovoda eliptičnega prereza. Valjno-eliptične koordinate vključujejo (eksponentno) oddaljenost u od goriščnega traku širine $2f$, kot v za opis zasuka v ravnini xy ter višino z nad ravnino xy , ki povsem ustreza enako poimenovani kartezični koordinati z .

Oddaljenost u od osi zapisujemo v logaritemskih enotah $[\text{Np}]$ in vedno vzamemo pozitivno $0 \leq u < +\infty$. Dejanske izmere dobimo s pomočjo privzete goriščne razdalje f , ki ima merske enote dolžine $[\text{m}]$. Kot v zapisujemo v radianih $[\text{rd}]$ in se lahko giblje v območju $0 \leq v < 2\pi$. Povsem enako kot v kartezičnem koordinatnem sistemu tretjo koordinato z zapisujemo v metrih $[\text{m}]$ in za njeno vrednost ni posebnih omejitev:

Valjno-eliptične koordinate



V valjno-eliptičnem koordinatnem sistemu (u, v, z) je edino koordinatna os z ravna (premica). Koordinatni osi u in v sta ukrivljeni. Koordinatna os u je katerakoli hiperbola $v = konst.$,

koordinatna os v pa katerakoli elipsa $u = konst.$. Družini hiperbol in elips imata skupni privzeti gorišči na razdalji $2f$.

Laméjev koeficient $h_z = 1$ je edini enak enoti. Ostala dva Laméjeva koeficienta $h_u = h_v = f \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$ sta med sabo enaka, čeprav prvi pretvarja Nepe [Np] v dolžinske enote [m], drugi pa radiane [rd] v dolžinske enote [m].

Pravilo desnega vijaka določa privzeti vrstni red koordinat (u, v, z) oziroma vektorski produkt smernikov $\vec{1}_z = \vec{1}_u \times \vec{1}_v$. V valjno-eliptičnem koordinatnem sistemu je edino smernik $\vec{1}_z$ konstanten vektor. Smernika $\vec{1}_u$ in $\vec{1}_v$ spreminjata smer v prostoru s koordinatama u in v .

Na velikih oddaljenostih $u \gg 1$ od osi z preidejo valjno-eliptične koordinate (u, v, z) v navadne valjne koordinate (ρ, φ, z) . Hiperbole $v = konst.$ se približajo premicam $\varphi = konst.$ (asimptotam). Elipse $u = konst.$ se približajo krogom $\rho = konst.$. Kota $v \approx \varphi$ na velikih razdaljah sovpadeta. Oddaljenost $\rho \approx f/2 \cdot e^u$ od osi z določimo s približkom hiperboličnih funkcij.

Povezavo med smerniki valjno-eliptičnega in kartezičnega koordinatnega sistema poiščemo tako, da iskani smernik razstavimo na komponente. V valjno-eliptičnih koordinatah projekcije smernikov niso samoumevne kot v valjnih ali krogelnih koordinatah, zato jih poiščemo z odvodi premikov. Na primer, projekcija $\vec{1}_x \cdot \vec{1}_u = dx_u / dl_u$ je enaka premiku dx_u v smeri osi x deljenemu s celotnim premikom dl_u , oba pri spremembi eliptične koordinate du . Premik v smeri x dobimo z delnim odvodom $dx_u = (\partial x / \partial u) du$, celoten premik pa z Laméjevim koeficientom $dl_u = h_u du$.

Krogelni koordinatni sistem (r, Θ, Φ) ima v eliptičnem svetu dva sorodnika. Ravnino elipse lahko zavrtimo okoli velike osi ali pa okoli male osi elipse. Glede na izbiro osi vrtenja elipse dobimo dva različna elipsoida, ki sta osnova dveh različnih krogelno-eliptičnih koordinatnih sistemov.

Vrtenina okoli velike osi je podolgovat (angleško: prolate) rotacijski elipsoid. Pripadajoči podolgovati krogelno-eliptični koordinatni sistem je uporaben za obravnavo osamljenih kovinskih, dielektričnih oziroma feromagnetnih palic.

Vrtenina okoli male osi je sploščen (angleško: oblate) rotacijski elipsoid. Pripadajoči sploščeni krogelno-eliptični koordinatni sistem je uporaben za obravnavo osamljene krožne kovinske plošče. Sploščeni krogelno-eliptični koordinatni sistem se uporablja tudi za natančnejše zemljepisne koordinate.

Oba opisana krogelno-eliptična koordinatna sistema zapisujeta prvi dve koordinati na podoben način kot $u[\text{Np}]$ in $v[\text{rd}]$ v valjno-eliptičnem koordinatnem sistemu. Tretja koordinata je zemljepisna dolžina $\Phi[\text{rd}]$, merjena okoli osi vrtenine. Oba krogelno-eliptična koordinatna sistema na velikih razdaljah sovpadeta z navadnimi krogelnimi koordinatami (r, Θ, Φ) .

Poleg omenjenih dveh krogelno-eliptičnih koordinatnih sistemov obstaja še pisana množica najrazličnejših 3D koordinatnih sistemov. Ker se v elektrodinamiki uporabljajo bolj poredko, se opisovanje koordinatnih sistemov tu zaključuje.

* * * * *

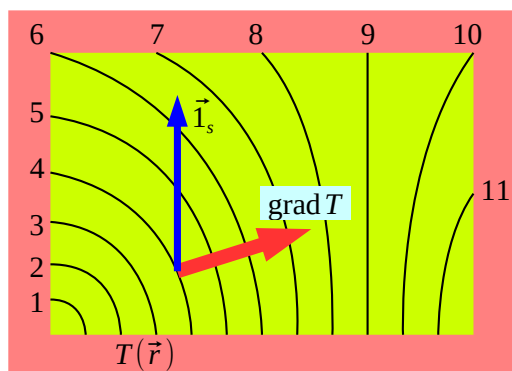
7. Odvajanje v prostoru

Reševanje fizikalnih nalog, kamor sodi tudi elektrodinamika, zahteva odvajanje oziroma integriranje različnih funkcij po koordinatah prostora. V tri-dimenzijskih nalogah nastopajo funkcije vseh treh koordinat, na primer (x, y, z) ali na kratko zapisano (\vec{r}) . Funkcije so lahko skalarji, na primer temperatura $T(\vec{r})$ ali pa vektorji, na primer sila $\vec{F}(\vec{r})$.

Zagrizeni matematiki na hitro zaključijo, da ima v treh dimenzijah skalarna funkcija tri med sabo neodvisne odvode po vseh treh različnih koordinatah. Vektorsko funkcijo lahko zapišemo po komponentah, torej tri komponente krat tri koordinate daje skupaj devet različnih odvodov. Opisano razmišljanje ima dve hudi pomanjkljivosti: rezultat mogoče nima nobenega fizikalnega pomena ter je odvisen od izbire koordinatnega sistema.

Bolj smiselno je opisati odvajanje skalarne funkcije treh koordinat $T(\vec{r})$ kot smerni odvod ali gradient. Smerni odvod $\text{grad } T$ je vektor, ki kaže v smeri največje spremembe vrednosti funkcije. Velikost $|\text{grad } T|$ ustreza velikosti odvoda skalarne funkcije po dolžinski enoti v tej smeri:

Smerni odvod (gradient)



$$\frac{\partial T}{\partial s} = \vec{1}_s \cdot (\text{grad } T) = \vec{1}_s \cdot (\vec{\nabla} T)$$

$$\text{grad } T = \vec{1}_{q1} \frac{\partial T}{\partial l_1} + \vec{1}_{q2} \frac{\partial T}{\partial l_2} + \vec{1}_{q3} \frac{\partial T}{\partial l_3}$$

$$dl_j = h_j dq_j$$

$$\text{grad } T = \vec{1}_{q1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} + \vec{1}_{q2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} + \vec{1}_{q3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial q_3}$$

Kartezične koordinate $T(\vec{r}) = T(x, y, z)$

$$\text{grad } T = \vec{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial T}{\partial z} = \vec{\nabla} T$$

$$\vec{\nabla} = \vec{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Valjne koordinate $T(\vec{r}) = T(\rho, \varphi, z)$

$$\text{grad } T = \vec{1}_\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} + \vec{1}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \vec{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

Krogelne koordinate $T(\vec{r}) = T(r, \Theta, \Phi)$

$$\text{grad } T = \vec{1}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \vec{1}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \vec{1}_\Phi \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial T}{\partial \Phi}$$

Odvod skalarne funkcije $T(\vec{r})$ v poljubni smeri \vec{s} izračunamo s skalarnim produktom med smernikom $\vec{1}_s$ in smernim odvodom $\text{grad } T$. Komponente smernega odvoda $\text{grad } T$ so preprosto odvodi po vseh treh dolžinskih elementih l_1 , l_2 in l_3 poljubnega koordinatnega sistema. Odvode po dolžinskih elementih l_1 , l_2 in l_3 izračunamo iz odvodov po vseh treh koordinatah q_1 , q_2 in q_3 s pomočjo Laméjevih koeficientov h_1 , h_2 in h_3 .

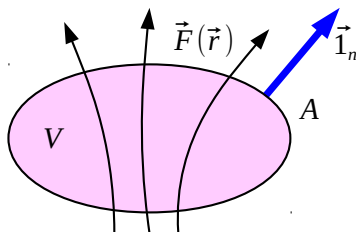
Izračun $\text{grad } T$ je najpreprostejši v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z) . Operator odvajanja lahko v kartezičnih koordinatah zapišemo kot simbolični vektor $\vec{\nabla}$ imenovan »Nabla«, ki deluje na skalarno funkcijo $T(\vec{r})$. Smerni odvod $\text{grad } T$ je sicer neodvisen od izbranega koordinatnega sistema in se rezultat njegovega izračuna prav nič ne spremeni ne glede na uporabljeni koordinatni sistem. Le vektorja $\vec{\nabla}$ ne znamo zapisati v drugih koordinatnih sistemih. Bolj točno, $\vec{\nabla}$ nima preprostega zapisa povsod tam, kjer smerniki niso konstantni vektorji.

Kot primera sta prikazana izračuna smernih odvodov v valjnih (ρ, φ, z) in krogelnih (r, Θ, Φ) koordinatah. Laméjevi koeficienti tu ne poskrbijo samo za pravilnost številskega izračuna, pač pa poskrbijo tudi za pravilne merske enote! Odvajanje po dolžini pomeni, da morajo imeti vse komponente smernega odvoda $\text{grad } T$ iste merske enote, ki imajo dodaten meter v imenovalcu [m] glede na prvotno funkcijo $T(\vec{r})$. Če je temperatura $T(\vec{r})$ izražena v Kelvinih [K], ima smerni odvod $\text{grad } T$ merske enote [K/m].

Vektorska funkcija treh koordinat $\vec{F}(\vec{r})$ ima v fizikalnih nalogah dva zanimiva odvoda: izvornost (divergenca) in vrtinčenje (rotor). Izvornost vektorske funkcije $\text{div } \vec{F}$ opisuje Gaussov izrek. Če v izbrani prostornini V seštejemo vse izvore $\text{div } \vec{F}$, bo vsota izvorov enaka pretoku $\vec{F}(\vec{r})$ skozi sklenjeno ploskev A , ki oklepa izbrano prostornino.

Izvornost $\text{div } \vec{F}$ je skalarna veličina, ki opisuje gostoto izvorov v enoti prostornine. Izvornost $\text{div } \vec{F}$ izračunamo tako, da zapišemo Gaussov izrek za diferencialno majhno prostornino $dV \rightarrow 0$. Hkrati s prostornino se krči proti nič tudi sklenjena ploskev $A \rightarrow 0$. V poljubnem koordinatnem sistemu (q_1, q_2, q_3) zapišemo Gaussov izrek za diferencialno majhno kocko prostornine $dV = dl_1 dl_2 dl_3$:

Izvornost (divergenca)



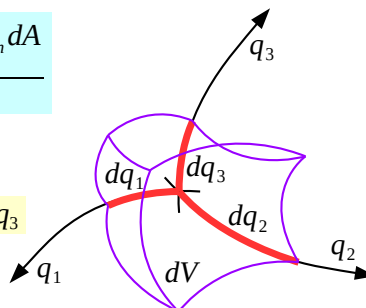
Gaussov izrek

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_A \vec{F} \cdot \vec{n} dA$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oint_{A \rightarrow 0} \vec{F} \cdot \vec{n} dA}{dV}$$

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$



$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{dV} [-F_1(q_1) dA_{23}(q_1) + F_1(q_1 + dq_1) dA_{23}(q_1 + dq_1) - F_2(q_2) dA_{13}(q_2) + F_2(q_2 + dq_2) dA_{13}(q_2 + dq_2) - F_3(q_3) dA_{12}(q_3) + F_3(q_3 + dq_3) dA_{12}(q_3 + dq_3)]$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 F_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_1 h_3 F_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 F_3)}{\partial q_3} \right]$$

$$dA_{ij} = h_i(q_1, q_2, q_3) h_j(q_1, q_2, q_3) dq_i dq_j$$

Kartezične koordinate $\vec{F}(x, y, z) \rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

Valjne koordinate $\vec{F}(\rho, \varphi, z) \rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

Krogelne koordinate $\vec{F}(r, \Theta, \Phi) \rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial (\sin \Theta F_\Theta)}{\partial \Theta} + \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial F_\Phi}{\partial \Phi}$

V krivočrtnem koordinatnem sistemu (q_1, q_2, q_3) so ploskve diferencialno majhne kocke $dV = dl_1 dl_2 dl_3$ sicer sekajo pod pravim kotom, vendar ploskve niso ravne niti niso enako velike med sabo. Ker so Laméjevi koeficienti $h_1(q_1, q_2, q_3)$, $h_2(q_1, q_2, q_3)$ in $h_3(q_1, q_2, q_3)$ funkcije koordinat, niti nasprotiležne ploskve krivočrtne kocke niso enako velike med sabo! Pri krčenju diferencialno majhne kocke $dV \rightarrow 0$ dobimo poleg odvodov komponent vektorske funkcije F_1 , F_2 in F_3 tudi odvode Laméjevih koeficientov h_1 , h_2 in h_3 povsod tam, kjer nastopajo v površinah dA_{ij} ploskev krivočrtne kocke.

Izračun izvornosti $\operatorname{div} \vec{F}$ je najpreprostejši v kartezičnem koordinatnem sistemu. V slednjem je diferencialno majhna prostornina $dV \rightarrow 0$ res prava kocka z ravnimi in med sabo enakimi ploskvami. Izvornost $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ zapišemo kot skalarni produkt vektorja »Nabla« in vektorske funkcije treh koordinat $\vec{F}(\vec{r})$.

Kot primera sta prikazana izračuna izvornosti $\operatorname{div} \vec{F}$ v valjnih (ρ, φ, z) in krogelnih (r, Θ, Φ) koordinatah. Laméjevi koeficienti tu ne poskrbijo samo za pravilnost številskega izračuna, pač pa poskrbijo tudi za

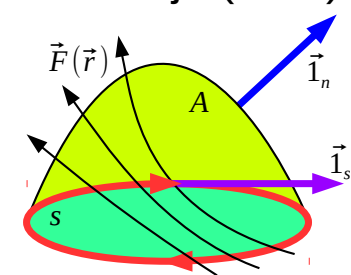
pravilne merske enote! Tudi izračun izvornosti $\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ pomeni odvajanje po dolžini, čeprav vektorja »Nabla« običajno ne znamo zapisati v krivočrtnih koordinatah. Izvornost $\operatorname{div} \vec{F}$ mora imeti merske enote, ki imajo dodaten meter v imenovalcu [m] glede na komponente vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.

Vrtinčenje vektorske funkcije $\operatorname{rot} \vec{F}$ opisuje Stokesov izrek. Če na izbrani ploskvi A seštejemo vse vrtince $\operatorname{rot} \vec{F}$, bo vsota enaka integralu funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ po sklenjeni krivulji s , na katero je vpeta ploskev A .

Vrtinci $\operatorname{rot} \vec{F}$ (angleško: $\operatorname{curl} \vec{F}$) so vektorska veličina, ki kaže v smeri osi vrtenja po pravilu desnega vijaka. V poljubnem koordinatnem sistemu (q_1, q_2, q_3) izračunamo eno komponento vrtinčenja $\vec{1}_{q_3} \cdot (\operatorname{rot} \vec{F})$ tako, da zapišemo Stokesov izrek za diferencialno majhno ploskev

$dA = dl_1 dl_2 \rightarrow 0$ v drugih dveh koordinatah. Hkrati s ploskvijo se krči proti nič tudi sklenjena krivulja $s \rightarrow 0$:

Vrtinčenje (rotor)



Stokesov izrek

$$\iint_A (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{1}_n dA = \oint_s \vec{F} \cdot \vec{1}_s ds$$

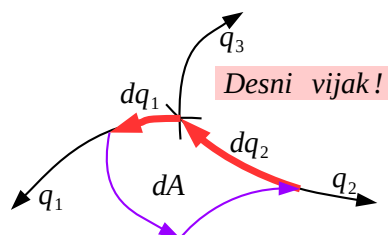
$$\vec{1}_{q_3} \cdot (\operatorname{rot} \vec{F}) = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{F} \cdot \vec{1}_s ds}{dA}$$

$$dA = dl_1 dl_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2$$

$$dl_j = h_j(q_1, q_2, q_3) dq_j$$

$$\vec{1}_{q_3} \cdot (\operatorname{rot} \vec{F}) = \frac{1}{dA} [F_1(q_2) h_1(q_2) dq_1 + F_2(q_1 + dq_1) h_2(q_1 + dq_1) dq_2 - F_1(q_2 + dq_2) h_1(q_2 + dq_2) dq_1 - F_2(q_1) h_2(q_1) dq_2]$$

$$\vec{1}_{q_3} \cdot (\operatorname{rot} \vec{F}) = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(F_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(F_1 h_1)}{\partial q_2} \right]$$



Desni vijak!

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{1}_{q_1} & h_2 \vec{1}_{q_2} & h_3 \vec{1}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \operatorname{curl} \vec{F}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{1}_{q_1} & \rho \vec{1}_{q_2} & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(r, \Theta, \Phi) = \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \begin{vmatrix} \vec{1}_r & r \vec{1}_\Theta & r \sin \Theta \vec{1}_\Phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ F_r & r F_\Theta & r \sin \Theta F_\Phi \end{vmatrix}$$

V krivočrtnem koordinatnem sistemu (q_1, q_2, q_3) se stranice diferencialno majhnega kvadrata $dA = dl_1 dl_2$ sicer sekajo pod pravim kotom, vendar stranice niso ravne niti niso enako velike med sabo. Ker sta

Laméjeva koeficienta $h_1(q_1, q_2, q_3)$ in $h_2(q_1, q_2, q_3)$ funkciji koordinat, niti nasprotiležne stranice krivočrtnega kvadrata kocke niso enako velike med sabo! Pri krčenju diferencialno majhnega kvadrata $dA \rightarrow 0$ dobimo poleg odvodov komponent vektorske funkcije F_1 in F_2 tudi odvode Laméjevih koeficientov h_1 in h_2 povsod tam, kjer nastopajo v dolžinah dl_j stranic krivočrtnega kvadrata.

Na podoben način kot komponento $\vec{1}_{q_3} \cdot (\text{rot } \vec{F})$ izračunamo še ostali dve komponenti vrtnčenja $\vec{1}_{q_1} \cdot (\text{rot } \vec{F})$ in $\vec{1}_{q_2} \cdot (\text{rot } \vec{F})$. Celoten izračun vrtnčenja $\text{rot } \vec{F}$ lahko lepo uredimo v determinanto 3×3 , ki spominja na vektorski produkt z dodatki Laméjevih koeficientov pred samo determinanto, v gornjo vrstico determinante s smerniki in v spodnjo vrstico determinante s komponentami vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.

Izračun vrtnčenja $\text{rot } \vec{F}$ je najpreprostejši v kartezičnem koordinatnem sistemu. V slednjem so diferencialno majhne ploskve $dA_{ij} \rightarrow 0$ res pravi kvadrati z ravnimi in med sabo enakimi stranicami. Vrtnčenje $\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ zapišemo kot vektorski produkt vektorja »Nabla« in vektorske funkcije treh koordinat $\vec{F}(\vec{r})$.

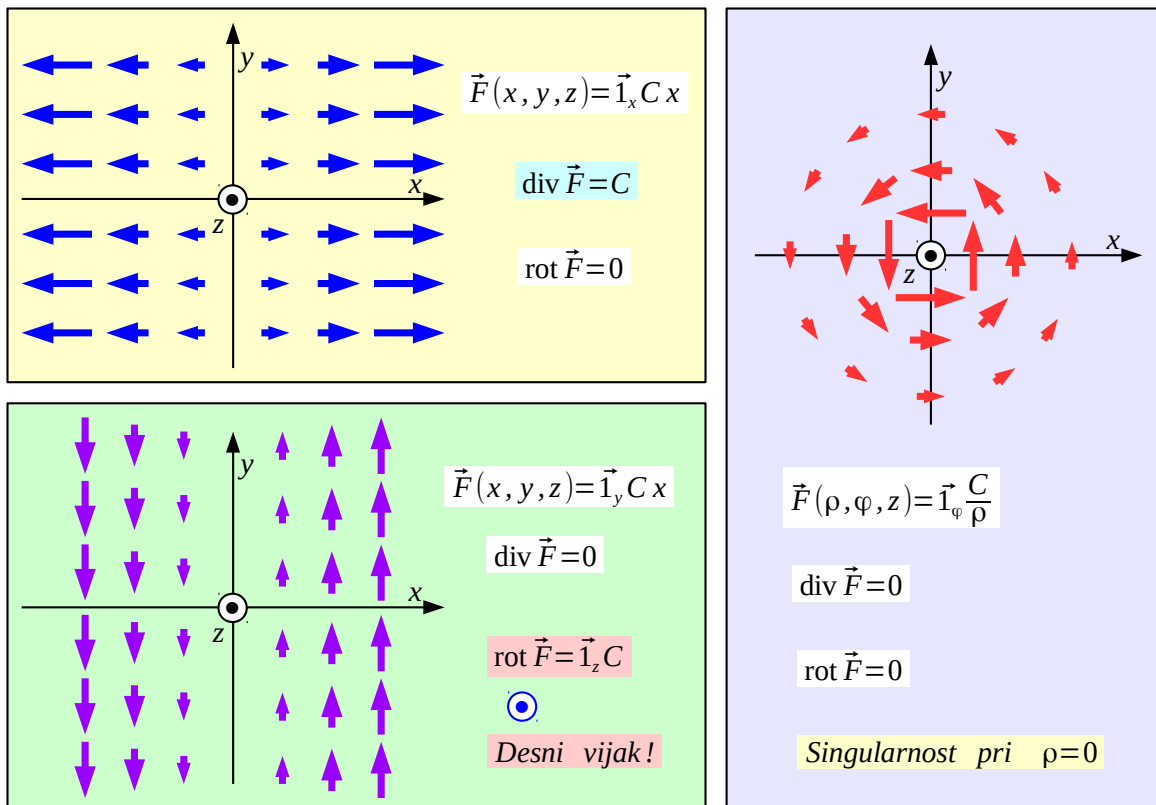
Kot primera sta prikazana izračuna vrtnčenja $\text{rot } \vec{F}$ v valjnih (ρ, φ, z) in krogelnih (r, Θ, Φ) koordinatah. Laméjevi koeficienti tu ne poskrbijo samo za pravilnost številskega izračuna, pač pa poskrbijo tudi za pravilne merske enote! Vektor vrtnčenja $\text{rot } \vec{F}$ mora imeti merske enote, ki imajo dodaten meter v imenovalcu [m] glede na vektorsko funkcijo $\vec{F}(\vec{r})$.

Glede na različne izraze za vrtnčenje se uporablja oznaka $\text{rot } \vec{F}$ v osrednji Evropi oziroma $\text{curl } \vec{F}$ v angleško govorečih deželah. V izogibanje zmešnjavi pogosto pišemo vrtnčenje kar kot $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ ne glede na uporabljeni koordinatni sistem, čeprav vektorja »Nabla« običajno ne znamo zapisati v krivočrtnih koordinatah.

Izvornost (divergenca) in vrtnčenje (rotor) skupno uporabljata vseh devet med sabo neodvisnih odvodov vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ v treh dimenzijah. Od teh uporablja izvornost tri odvode komponent po pripadajočih koordinatah, vrtnčenje pa šest odvodov komponent po preostalih koordinatah. Izvornost $\text{div } \vec{F}$ in vrtnčenje $\text{rot } \vec{F}$ sta torej dve med sabo popolnoma neodvisni funkciji. Z drugimi besedami, vektorsko funkcijo

$\vec{F}(\vec{r})$ poznamo do konstante natančno, če poznamo vse njene odvode, torej izvornost $\text{div } \vec{F}$ in vrtničenje $\text{rot } \vec{F}$.

Nekaj preprostih zgledov izvornosti $\text{div } \vec{F}$ in vrtničenja $\text{rot } \vec{F}$ je prikazanih na spodnji sliki. Levo zgoraj je primer vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, ki ima izvore. Jakost vektorjev narašča v isti smeri, kamor kažejo vektorji. Naraščajoči pretok zahteva prisotnost izvorov:



Levo spodaj je primer vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, ki ima vrtince. Velikost vektorjev se v isti smeri ne spreminja, torej izvorov ni. Kakršnakoli sklenjena pot v ravnini xy daje rezultat različen od nič, torej obstajajo vrtinci. Vrtinci imajo vektorski značaj. Vektor vrtničenja kaže v smeri osi vrtenja, torej v smeri \vec{i}_z po pravilu desnega vijaka.

Zgled na desni zagotovo namiguje na vrtenje. Kljub temu funkcija $\vec{F}(\vec{r})$ nima niti izvorov niti vrtincev? Kakršnakoli sklenjena pot v ravnini xy daje rezultat nič pod pogojem, da pot ne zajame singularnosti v osi z oziroma pri $\rho = 0$. Zgled na desni je torej strogo opozorilo: kakršnokoli odvajanje ne deluje pravilno v singularnostih. Singularnosti moramo v naših računih upoštevati na drugačen način, saj tam ne smemo računati odvodov.

Fizikalne naloge pogosto privedejo do diferencialnih enačb druge stopnje. Vsi opisani postopki odvajanja: smerni odvod $\text{grad } T$, izvornost $\text{div } \vec{F}$ in vrtnčenje $\text{rot } \vec{F}$ pomenijo odvajanje prvega reda. Odvode drugega reda dobimo tako, da sestavimo dva postopka odvajanja.

V fizikalnih nalogah je najbolj pogost Laplacejev operator odvajanja drugega reda. Skalarni Laplacejev operator zapišemo z veliko črko »Delta«, ki iz skalarne funkcije $T(\vec{r})$ naredi novo skalarno funkcijo ΔT :

$$\text{div}(\text{grad } T) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) = \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Smerni odvod $\text{grad } T$ je vektorska funkcija, torej smemo izračunati njeno vrtnčenje, ki je vedno enako nič. Zapis odvajanja z vektorjem »Nabla« takoj razloži, zakaj. Vektorski produkt dveh enakih vektorjev je vedno enak nič, torej smerni odvod nima vrtincev:

$$\text{rot}(\text{grad } T) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} T) = 0$$

Ko bi smerni odvod $\text{grad } T$ imel vrtince, bi pri integriranju dobili različne vrednosti izvorne skalarne funkcije $T(\vec{r})$ odvisno od izbrane integracijske poti, kar zagotovo ni smiselno. Omejitve obstajajo tudi za vrtince, ki ne smejo imeti izvorov:

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

Matematična razlaga pravi, da je notranji vektorski produkt (vrtnčenje) vedno pravokoten na oba vektorja. Torej deluje zunanji skalarni produkt (izvornost) med dvema vektorjema, ki sta med sabo pravokotna. Ko bi vrtinci imeli izvore, bi bila rezultata integracije vrtincev po dveh različnih ploskvah A_1 in A_2 , vpetih na isto sklenjeno krivuljo s , med sabo različna, kar nasprotuje opisu vrtnčenja s Stokesovim izrekom.

Izvornost sicer pogosto potrebujemo za Gaussov izrek, da zahtevno integracijo po prostornini V prevedemo na manj zahtevo oziroma zanimivejšo integracijo po sklenjeni ploskvi A . Izvornost lahko razvijemo tako za skalarni funkciji $U(\vec{r})$ in $W(\vec{r})$ kot za vektorski funkciji $\vec{A}(\vec{r})$ in $\vec{B}(\vec{r})$:

$$\text{div}(U \text{ grad } W - W \text{ grad } U) = \vec{\nabla} \cdot (U \vec{\nabla} W - W \vec{\nabla} U) = U \Delta W - W \Delta U$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$$

Končno se nam pri reševanju enačb v elektrodinamiki pogosto pojavi vrtnčenje vrtnčenja oziroma izraz $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$. Izraz skušamo prevesti v vektorski Laplace, ki je definiran kot:

$$\Delta \vec{F} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \vec{1}_x \Delta F_x + \vec{1}_y \Delta F_y + \vec{1}_z \Delta F_z$$

Vektorski Laplace ima eno samo dobro lastnost. V kartezičnih koordinatah ga lahko razvijemo v vsoto treh skalarnih Laplace na posameznih komponentah vektorske funkcije. Skalarni Laplace je nazadnje tisto, kar dejansko znamo rešiti. Poleg kartezičnih koordinat je razvoj v skalarni Laplace možen povsod tam, kjer so smerni vektorji konstantni. V valjnih in valjno-eliptičnih koordinatah je smernik $\vec{1}_z$ konstanten, torej smemo komponento z vektorskega Laplace $\vec{1}_z \cdot \Delta \vec{F} = \Delta F_z$ zapisati s skalarnim Laplace pripadajoče komponente F_z .

* * * * *

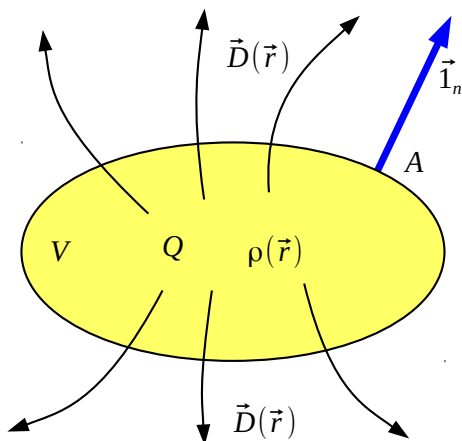
8. Maxwellove enačbe

James Clerk Maxwell je vse dotedanje znanje o elektriki in magnetiki leta 1861 združil v slovite enačbe, ki danes nosijo njegovo ime. Maxwellove enačbe lahko zapišemo na različne načine. V vektorskem zapisu, kot jih najpogosteje uporabljamo danes, jih je dve desetletji za Maxwellom zapisal šele Oliver Heaviside.

Pri osnovah elektrotehnike zapišemo Maxwellove enačbe z najmanj matematike v integralni obliki. V elektrodinamiki jih je treba pretvoriti v diferencialno obliko, da postane naloga zadosti majhna, torej diferencialno majhna. V diferencialno majhni nalogi so zakasnitve diferencialno majhne, torej relativistika ne nagaja.

Povezavo med viri polja in pretokom je našel znani matematik Carl Friedrich Gauss leta 1835. V elektrostatiki je vsota prostorske gostote elektrine $\rho(\vec{r})$ v določeni prostornini V enaka celotni elektrini Q . Isti rezultat da tudi vsota gostote električnega pretoka $\vec{D}(\vec{r})$ po sklenjeni površini A , ki zajema isto prostornino:

Gaussov zakon



Magnetno polje nima izvorov

$$\oint_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_n dA = 0 \rightarrow \text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Gaussov zakon v integralni obliki

$$\iiint_V \rho(\vec{r}) dV = Q = \oint_A \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_n dA$$

$\rho(\vec{r}) \equiv$ prostorska gostota elektrine [As/m³]

$Q \equiv$ celotna elektrina [As]

$\vec{D}(\vec{r}) \equiv$ gostota električnega pretoka [As/m²]

Gaussov izrek

$$\iiint_V \text{div } \vec{D}(\vec{r}) dV = \oint_A \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_n dA$$

Gaussov zakon v diferencialni obliki

$$\rho(\vec{r}) = \text{div } \vec{D}(\vec{r})$$

$\vec{E}(\vec{r}) \equiv$ električna poljska jakost [V/m]

$\epsilon \equiv$ dielektričnost [As/Vm]

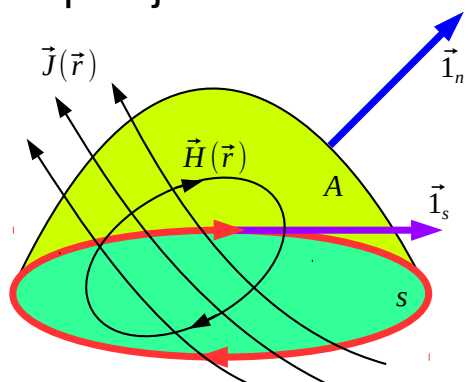
$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \rightarrow \text{div}(\epsilon \vec{E}(\vec{r})) = \rho(\vec{r})$$

Zapis v takšni integralni obliki (seštevanje) je sicer preprosto razumljiv, ampak neroden. Za opis fizikalnega zakona potrebujemo neko prostornino V in neko sklenjeno površino A , ki nista del naloge niti nujno nista majhni. S pomočjo Gaussovega izreka iz matematike pretvorimo Gaussov zakon v diferencialno obliko $\text{div } \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$.

Magnetno polje nima izvorov niti ponorov. Gaussov zakon za gostoto magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$ lahko pretvorimo iz integralne oblike v diferencialno $\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0$.

Povezavo med električnim tokom I in pripadajočo magnetno poljsko jakostjo $\vec{H}(\vec{r})$ je našel André-Marie Ampère leta 1826. Integral $\vec{H}(\vec{r})$ po sklenjeni krivulji s daje skupni tok I , ki teče skozi krivuljo. Tok I je vsota gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ po poljubni ploskvi A , ki je vpeta na isto sklenjeno krivuljo:

Ampèrejev zakon



Ampèrejev zakon v integralni obliki

$$\iint_A \vec{J}(\vec{r})_{\text{skupni}} \cdot \vec{1}_n dA = I = \oint_s \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_s ds$$

$\vec{J}(\vec{r}) \equiv$ gostota električnega toka $[A/m^2]$

$I \equiv$ celoten električni tok $[A]$

$\vec{H}(\vec{r}) \equiv$ magnetna poljska jakost $[A/m]$

Stokesov izrek

$$\iint_A (\text{rot } \vec{H}(\vec{r})) \cdot \vec{1}_n dA = \oint_s \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_s ds$$

Ampèrejev zakon v diferencialni obliki

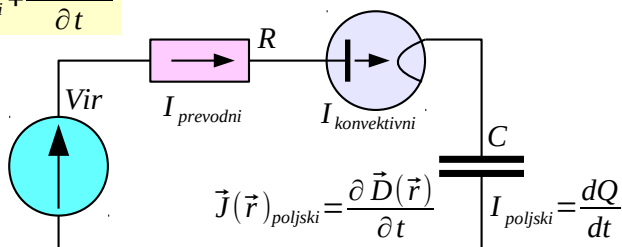
$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})_{\text{skupni}} = \vec{J}(\vec{r})_{\text{prevodni}} + \vec{J}(\vec{r})_{\text{konvektivni}} + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r})}{\partial t}$$

$\gamma \equiv$ specifična prevodnost $[A/Vm]$

$$\vec{J}(\vec{r})_{\text{prevodni}} = \gamma \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})_{\text{prevodni}} + \vec{J}(\vec{r})_{\text{konvektivni}}$$

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r})}{\partial t} = \vec{J}(\vec{r}) + \epsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial t}$$



Zapis Ampèrejevega zakona v integralni obliki (seštevanje) je sicer preprosto razumljiv, ampak neroden. Za njegov opis potrebujemo neko sklenjeno krivuljo s in neko ploskev A , ki nista del naloge niti nujno nista majhni. S pomočjo Stokesovega izreka iz matematike pretvorimo

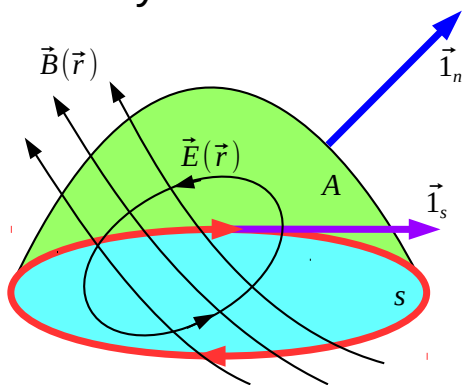
Ampèrejev zakon v diferencialno obliko $\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})_{\text{skupni}}$.

Ampèrejev zakon vključuje vse električne tokove: prevodni tok I_{prevodni} v kovinah, konvektivni tok nosilcev elektrine v povsem praznem prostoru $I_{\text{konvektivni}}$ in poljski tok $I_{\text{poljski}} = dQ/dt$ kot prirastek električnega pretoka v enoti časa. Gostoto poljskega toka $\partial \vec{D}(\vec{r})/\partial t$ običajno zapišemo posebej. Oznako $\vec{J}(\vec{r})$ običajno uporabljamo za gostoto prevodnega električnega toka, saj konvektivni tok v marsikateri praktični nalogi ne nastopa.

Znotraj prevodnika je gostota prevodnega električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ povezana z električno poljsko jakostjo $\vec{E}(\vec{r})$ preko specifične prevodnosti snovi γ , vendar te povezave pogosto ne zapisujemo.

Michael Faraday je leta 1831 odkril, da sprememba celotnega magnetnega pretoka $d\Phi/dt = -U_i$ inducira v žični zanki napetost. Inducirana napetost je integral električne poljske jakosti po sklenjeni krivulji zanke s . Celoten magnetni pretok je vsota gostote magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$ po poljubni ploskvi A , ki je vpeta na sklenjeno krivuljo zanke:

Faradayev zakon



Faradayev zakon v integralni obliki

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_n dA = \frac{d\Phi}{dt} = - \oint_s \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_s ds$$

$\vec{B}(\vec{r}) \equiv$ gostota magnetnega pretoka [Vs/m²]

$\Phi \equiv$ celoten magnetni pretok [Vs]

$\vec{E}(\vec{r}) \equiv$ električna poljska jakost [V/m]

Stokesov izrek

$$\iint_A (\text{rot } \vec{E}(\vec{r})) \cdot \vec{1}_n dA = \oint_s \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_s ds$$

Faradayev zakon v diferencialni obliki

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r})}{\partial t} = - \mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r})}{\partial t}$$

$\mu \equiv$ permeabilnost [Vs/Am]

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r})$$

Magnetno polje nima izvorov

$$\text{div} [\text{rot } \vec{E}(\vec{r})] = 0 = \text{div} \left[- \frac{\partial \vec{B}(\vec{r})}{\partial t} \right] \rightarrow \text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Zapis Faradayevega zakona v integralni obliki (seštevanje) je sicer preprosto razumljiv, ampak neroden. Za njegov opis potrebujemo neko sklenjeno krivuljo s in neko ploskev A , ki nista del naloge niti nujno nista majhni. S pomočjo Stokesovega izreka iz matematike pretvorimo Faradayev zakon v diferencialno obliko $\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = -\partial \vec{B}(\vec{r}) / \partial t$.

Pri opisani obravnavi Maxwellovih enačb v elektrodinamiki privzamemo poenostavitev, da se krivulje s , ploskve A in prostornine V s časom ne spreminjajo. Prav tako privzamemo, da je odziv snovi linearen in so lastnosti snovi dielektričnost ϵ , prevodnost γ in permeabilnost μ preproste skalarne konstante. Taka snov je torej homogena, da lastnosti snovi niso odvisne od položaja \vec{r} , in izotropna, da lastnosti snovi niso tenzorji.

Če izračunamo izvornost $\text{div}()$ Faradayevega zakona, ugotovimo, da gostota magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$ nima izvorov. Magnetnih nabojev ali magnetin kljub vsemu iskanju do danes fiziki niso našli. Poseben zapis Gaussovega zakona za magnetno polje torej sploh ni potreben.

Relativistika sicer nikjer ne zahteva vrtinčenja. Ampère in Faraday mogoče danes izgledata starokopitna? Kljub odsotnosti magnetnih nabojev imamo različne naravne snovi (feromagnetiki) in umetno izdelane uporabne naprave (žične zanke, tuljave), kjer je obravnavna z vrtinčenjem dobrodošla. Predznake magnetnih veličin $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ in Φ smemo poljubno izbrati, na primer z izbiro desnoročnega koordinatnega sistema. Edina resnična fizikalna zahteva je, da imata Ampère in Faraday različna predznaka!

Če izračunamo izvornost $\text{div}()$ Ampèrejevega zakona, pridemo do pomembne povezave med gostoto električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ in prostorsko gostoto elektrine $\rho(\vec{r})$. V izvorih toka se začne pojavljati primanjkljaj elektrine, v ponorih toka pa začne priraščati višek elektrine. Opisano fizikalno zakonitost imenujemo zveznost toka in elektrine.

Če seštejemo gostoto električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ v celoten električni tok I in prostorsko gostoto elektrine $\rho(\vec{r})$ v celotno elektrino Q , lahko zveznost toka in elektrine opišemo še bolj enostavno s skalarno enačbo. Preprost zgled sta dve sicer izolirani kovinski elektrodi, ki ju povežemo s prevodno žico. Tok v žici I je enak časovnemu prirastku elektrine dQ_1/dt na eni elektrodi in primanjkljaju elektrine $-dQ_2/dt$ na drugi elektrodi:

Zveznost toka in elektrine

$$\text{Ampère: } \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r})}{\partial t} \quad / \operatorname{div}()$$

$$\operatorname{div}[\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r})] = 0 = \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r})$$

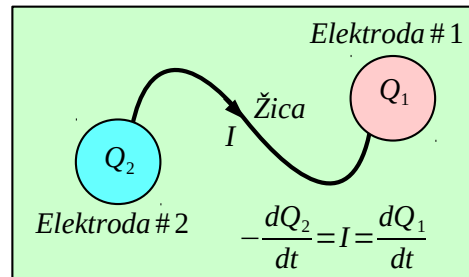
$$\text{Gauss: } \rho(\vec{r}) = \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r})$$

$$0 = \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t}$$

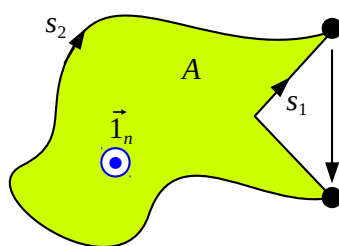
$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}) dV = I$$

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t} dV = \frac{dQ}{dt}$$

$$0 = I + \frac{dQ}{dt}$$



Definicija napetosti



$U \equiv \text{električna napetost [V]}$

$$U = - \int_{s_1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_{s_1} ds_1 = - \int_{s_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_{s_2} ds_2$$

$$\oint_{s_1+s_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_s ds = 0 = \iint_A (\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r})) \cdot \vec{1}_n dA \rightarrow \vec{1}_n \cdot (\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r})) = 0$$

V elektrotehničnih nalogah pogosto uporabljamo veličino električno napetost U . Napetost med dvema točkama je integral električne poljske jakosti $\vec{E}(\vec{r})$ po krivulji s , ki povezuje obe točki. V elektrodinamiki definicija napetosti ni vedno smiselna. V marsikateri nalogi elektrodinamike napetost U sploh ne obstaja, ker integracija po različnih poteh daje različne rezultate.

Strogo mišljeno napetost U obstaja samo takrat, ko daje integracija po katerikoli poti enak rezultat. Integracija po katerikoli sklenjeni poti mora dati rezultat nič, kar strogo zahteva $\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0$. V marsikateri nalogi se sprijaznimo z definicijo napetosti U v izbrani ravnini in takrat zadošča milejši pogoj $\vec{1}_n \cdot (\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r})) = 0$.

V predlagani vektorski in diferencialni obliki lahko zapišemo Maxwellove enačbe na številne različne načine. Ko so vse električne in magnetne veličine funkcije istega položaja (\vec{r}) , lahko to v vseh enačbah izpustimo. Preprosta linearna, homogena in izotropna snov nam omogoča, da iz enačb izločimo gostote pretokov. Končno v frekvenčnem prostoru postanejo vse električne veličine kazalci, časovne odvode pa nadomesti $j\omega$:

Valovna enačba

Časovni prostor

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ (2) \quad \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (3) \quad \text{div } \vec{D} &= \rho \end{aligned}$$

Snov

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

Poljske jakosti

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (2) \quad \text{rot } \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ (3) \quad \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned}$$

Odvodi

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

Frekvenčni prostor

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} + j\omega\epsilon \vec{E} \\ (2) \quad \text{rot } \vec{E} &= -j\omega\mu \vec{H} \\ (3) \quad \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -j\omega\mu \text{rot } \vec{H} = -j\omega\mu (\vec{J} + j\omega\epsilon \vec{E}) = -j\omega\mu \vec{J} + \omega^2\mu\epsilon \vec{E}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \text{grad } \rho - \Delta \vec{E}$$

Valovna enačba za \vec{E}

$$\Delta \vec{E} + \omega^2\mu\epsilon \vec{E} = j\omega\mu \vec{J} + \frac{1}{\epsilon} \text{grad } \rho$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = \text{rot } \vec{J} + j\omega\epsilon \text{rot } \vec{E} = \text{rot } \vec{J} + \omega^2\mu\epsilon \vec{H}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{H}) = \text{grad}(\text{div } \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H}$$

Valovna enačba za \vec{H}

$$\Delta \vec{H} + \omega^2\mu\epsilon \vec{H} = -\text{rot } \vec{J}$$

S pomočjo Maxwellovih enačb skušamo rešiti preprosto elektrotehnično nalogo: kakšni sta polji \vec{E} oziroma \vec{H} , če poznamo izvore, torej vse tokove \vec{J} in vse elektrine ρ ? Valovno enačbo za električno polje \vec{E} dobimo tako, da drugo Maxwellovo enačbo (Faraday) odvajamo z $\text{rot}()$. Dobljeni $\text{rot } \vec{H}$ nato zamenjamo po prvi Maxwellovi enačbi (Ampère). Končno pretvorimo $\text{rot}(\text{rot } \vec{E})$ v vektorski Laplace $\Delta \vec{E}$ in manjkajoči $\text{div } \vec{E}$ nadomestimo s tretjo Maxwellovo enačbo (Gauss).

Valovno enačbo za magnetno polje \vec{H} dobimo na podoben način. Najprej odvajamo Ampère z $\text{rot}()$. Dobljeni $\text{rot } \vec{E}$ nato zamenjamo po Faradayu. Končno pretvorimo $\text{rot}(\text{rot } \vec{H})$ v vektorski Laplace $\Delta \vec{H}$, saj je $\text{div } \vec{H} = 0$ vedno nič.

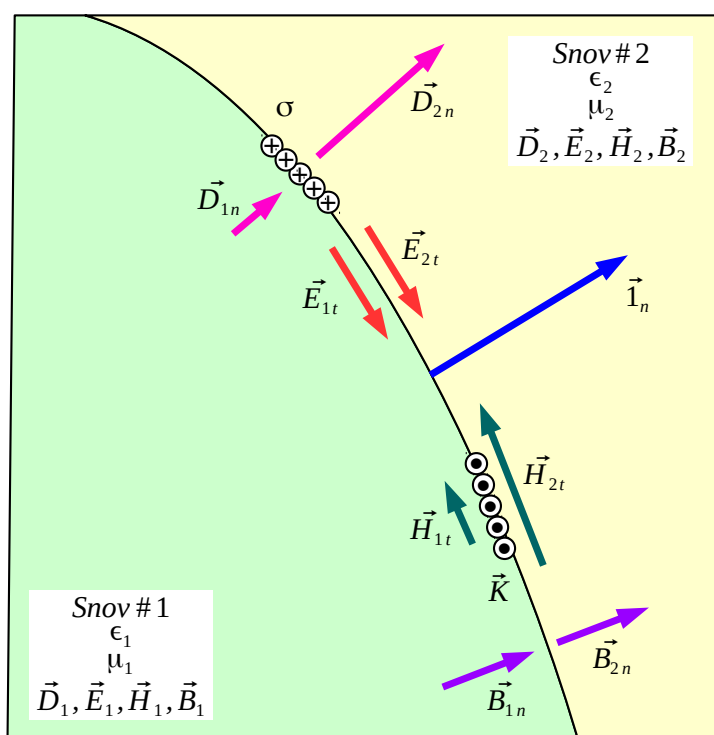
Obe valovni enačbi za \vec{E} in \vec{H} imata isto pomanjkljivost: na izvore na desni strani, tokove \vec{J} in elektrine ρ delujejo diferencialne operacije, ki jih je običajno težko izračunati zaradi singularnosti. Računanje električnega in magnetnega polja neposredno preko Maxwellovih enačb iz tokov in elektrin ni najbolj ugodna pot. Obe valovni enačbi za \vec{E} in \vec{H} seveda s pridom uporabljamo v tistih delih prostora, kjer izvorov ni in je desna stran valovnih enačb enaka nič.

Končno v elektrotehničnih nalogah pogosto naletimo na primere, ko imamo v isti nalogi več različnih snovi. Vsaka snov sama zase je preprosta, torej linearna, homogena in izotropna. Meja dveh različnih snovi predstavlja singularnost, kjer ne smemo uporabljati Maxwellovih enačb v diferencialni obliki. Mejo dveh različnih snovi zato opišemo s prestopnimi pogoji povsem enako kot pri osnovah elektrotehnike:

Prestopni pogoji

$\sigma \equiv$ ploskovna elektrina [As/m²]

$\vec{K} \equiv$ ploskovni tok [A/m]



$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

Tangencialno komponento izlušči vektorski produkt z normalo, normalno komponento pa skalarni produkt z normalo. Tangencialna komponenta \vec{E} in normalna komponenta \vec{B} vedno prestopata zvezno. Normalna komponenta \vec{D} lahko ima skok, ki ustreza ploskovni elektrini σ , ki se je nabrala na meji dveh snovi. Ploskovni tok \vec{K} na meji dveh snovi povzroči skok tangencialne komponente \vec{H} .

* * * * *

9. Vektorski potencial

Reševanje preproste elektrotehnične naloge: kakšni sta polji $\vec{E}(\vec{r})$ oziroma $\vec{H}(\vec{r})$, če poznamo izvore, torej vse tokove $\vec{J}(\vec{r})$ in vse elektrine $\rho(\vec{r})$, vodi v dve komplicirani, vektorski diferencialni valovni enačbi drugega reda. Kompliciran račun skušamo poenostaviti z uvedbo novih vmesnih spremenljivk, ki jih imenujemo potenciali.

Račun je najpreprostejši v elektrostatiki $\partial/\partial t=0$ oziroma $\omega=0$. Takrat je vrtnčenje električnega polja zagotovo enako nič $\text{rot } \vec{E}(\vec{r})=0$. Če je vrtnčenje vektorskega polja enako nič, lahko takšno polje zapišemo kot smerni odvod neke skalarne veličine. Izbrano skalarno funkcijo $V(\vec{r})$ imenujemo kar potencial v elektrostatiki:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow \text{div}(\text{grad } V) = \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Žal sta takšen potencial $V(\vec{r})$ in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna v elektrodinamiki, kjer velja $\omega \neq 0$ oziroma $\text{rot } \vec{E} \neq 0$.

Podoben skalarni potencial $V_m(\vec{r})$ lahko uvedemo v magnetostatiki. $\text{rot } \vec{H}(\vec{r})=0$ zahteva statiko $\partial/\partial t=0$ oziroma $\omega=0$ in hkrati še odsotnost tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ vsaj v tistem delu prostora, kjer uporabljamo $V_m(\vec{r})$. Skalarni magnetni potencial $V_m(\vec{r})$ tedaj določa enačba:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad } V_m(\vec{r})$$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \rightarrow \text{div}(\text{grad } V_m) = \Delta V_m = 0$$

Žal sta takšen potencial $V_m(\vec{r})$ in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna tam, kjer je $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$ oziroma v elektrodinamiki, kjer velja $\omega \neq 0$ oziroma $j\omega \vec{D} \neq 0$.

Gostota električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ je vektorska veličina. Njenega učinka zato ne moremo opisati z neko vmesno skalarno funkcijo, saj skalarna

funkcija vsebuje trikrat manj podatkov od vektorske funkcije. Smiselna izbira bo v tem primeru neka vmesna vektorska veličina. Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ je definirali že James Clerk Maxwell kot:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad \text{oziroma} \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$$

Nova veličina vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ ima merske enote $[\text{Vs/m}]$. Pripadajoče električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ dobimo iz Faradayevega zakona. Električnemu polju smemo dodati poljuben smerni odvod, na primer $-\text{grad } V(\vec{r})$, saj je vrtnčenje slednjega vedno enako nič:

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \text{rot } \vec{A} \rightarrow \text{rot}(\vec{E} + j\omega \vec{A}) = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \text{grad } V(\vec{r})$$

Polji $\vec{E}(\vec{r})$ in $\vec{H}(\vec{r})$ torej računamo preko vmesnih spremenljivk, vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in skalarne potenciala $V(\vec{r})$ v poljubni nalogi elektrodinamike, kjer velja $\omega \neq 0$, $\vec{J}(\vec{r}) \neq 0$ oziroma $\rho(\vec{r}) \neq 0$. Pri tem smo skalarni potencial $V(\vec{r})$ izbrali tako, da je čim bolj podoben tistemu iz elektrostatike. Za oba potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ moramo seveda poiskati točne valovne enačbe v elektrodinamiki.

Valovno enačbo za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ dobimo iz Ampèrejevega zakona:

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J} + j\omega \epsilon \vec{E} = \vec{J} + \omega^2 \epsilon \vec{A} - j\omega \epsilon \text{grad } V$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{A} = -\mu \vec{J} + \text{grad}(j\omega \mu \epsilon V + \text{div } \vec{A})$$

V vsem dosedanjem izvajanju je bilo določeno samo vrtnčenje vektorskega potenciala $\text{rot } \vec{A}$. Izvornost vektorskega potenciala $\text{div } \vec{A}$ je zaenkrat poljubna, saj je popolnoma neodvisna od vrtnčenja.

Izvornost vektorskega potenciala $\text{div } \vec{A}$ lahko izberemo na različne načine. Najbolj preprosta je Columbova izbira $\text{div } \vec{A} = 0$ (angleško: Columb gauge). Valovno enačbo za vektorski potencial najbolj poenostavi Lorentzova

izbira $j\omega\mu\epsilon V + \text{div } \vec{A} = 0$ (angleško: Lorentz gauge):

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) + \omega^2\mu\epsilon \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$$

Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ je tedaj odvisen samo od gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ in ni odvisen od prostorske elektrine $\rho(\vec{r})$. Iz Gaussovega zakona dobimo še valovno enačbo za skalarni potencial $V(\vec{r})$:

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon} = \text{div}(-j\omega \vec{A} - \text{grad } V) = -\omega^2\mu\epsilon V - \Delta V$$

$$\Delta V(\vec{r}) + \omega^2\mu\epsilon V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Skalarni potencial $V(\vec{r})$ je z Lorentzovo izbiro odvisen samo od prostorske elektrine $\rho(\vec{r})$ in ni odvisen od gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$. Čeprav ima skalarni potencial $V(\vec{r})$ merske enote volti [V], ni neposredno povezan z električno napetostjo U , saj je slednja lahko definirana na različne načine oziroma v marsikateri nalogi elektrodinamike sploh ne obstaja.

Lorentzova izbira omogoča, da lepo ločimo učinka elektrine $\rho(\vec{r})$ in toka $\vec{J}(\vec{r})$. Elektrina $\rho(\vec{r})$ je skalarna veličina in poganja skalarni potencial $V(\vec{r})$. Tok $\vec{J}(\vec{r})$ je vektorska veličina in poganja vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$. Pri tem ne smemo pozabiti, da sta tok $\vec{J}(\vec{r})$ in elektrina $\rho(\vec{r})$ povezana z zahtevo za zveznost $j\omega\rho(\vec{r}) + \text{div } \vec{J}(\vec{r}) = 0$.

Konstanta $\omega^2\mu\epsilon$ nastopa v vseh valovnih enačbah za $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ oziroma $V(\vec{r})$. Konstanto lahko izrazimo na različne načine vključno s hitrostjo valovanja $v[\text{m/s}]$:

$$\omega^2\mu\epsilon = \frac{\omega^2}{v^2} = k^2 \rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \equiv \text{valovno število} \left[\frac{\text{rd}}{\text{m}} \right]$$

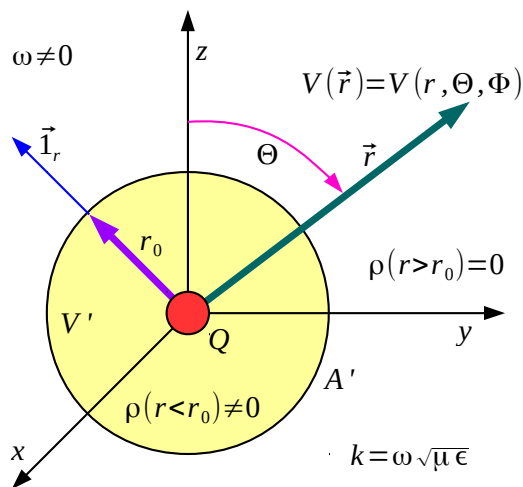
Valovno število k pove, kako hitro se faza spreminja z razdaljo v prostoru. V praznem prostoru seveda velja $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $k = k_0$ in $v = c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Z valovnim številom k obe valovni enačbi za potenciala preprosto zapišemo v frekvenčnem prostoru:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) + k^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$$

$$\Delta V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Najprej poskusimo poiskati rešitev za skalarno enačbo za $V(\vec{r})$, saj je preprostejša od vektorske enačbe za $\vec{A}(\vec{r})$. Najbolj preprost primer je ena sama točkasta elektrina Q v koordinatnem izhodišču. Takšna elektrina predstavlja singularnost, zato jo omejimo s kroglico s polmerom r_0 :

Točkasta elektrina



Zunaj kroglice $\rho(r>r_0)=0 \rightarrow \Delta V+k^2 V=0$

Ugibamo rešitev $V(r, \Theta, \Phi) = \frac{C}{r} e^{-jkr}$

$$\text{grad}V = \vec{1}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C}{r} e^{-jkr} \right) = -\vec{1}_r C \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{-jkr}$$

$$\Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 (-C) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{-jkr} \right)$$

$$\Delta V = -\frac{C}{r^2} (jk e^{-jkr} + (1 + jkr)(-jk) e^{-jkr}) = -k^2 V$$

$$\Delta V + k^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \leftarrow \iiint_{V'} dV'$$

$$\iiint_{V'} \Delta V dV' + \iiint_{V'} k^2 V dV' = \iiint_{V'} -\frac{\rho}{\epsilon} dV' = -\frac{Q}{\epsilon}$$

$$\iiint_{V'} \Delta V \, dV' = \iiint_{V'} \operatorname{div}(\operatorname{grad} V) \, dV' = \oint_{A'} \operatorname{grad} V \cdot \vec{1}_r \, dA' = \operatorname{grad} V \cdot \vec{1}_r 4\pi r_0^2 = -4\pi C(1+jkr_0)e^{-jkr_0}$$

$$r_0 \rightarrow 0 \quad -4\pi C(1+jkr)e^{-jkr} \rightarrow -4\pi C \quad -4\pi C = -\frac{Q}{\epsilon}$$

$$\iiint_{V'} k^2 V dV' = \int_0^{r_0} k^2 \frac{C}{r} e^{-jkr} 4\pi r^2 dr \rightarrow 0$$

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon}$$

$$V(r, \Theta, \Phi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr}$$

Zunaj kroglice $r > r_0$ ni elektrin niti singularnosti. Zunaj kroglice rešujemo poenostavljeno valovno enačbo brez izvorov. Rešitev za

$V(\vec{r}) = V(r, \Theta, \Phi)$ ugibamo v krogelnih koordinatah. V elektrostatiki je potencial točkaste elektrine točno obratno sorazmeren razdalji $1/r$. V elektrodinamiki sklepamo, da bo potencial $V(\vec{r}, t)$ zakasnjen učinek elektrine $Q(t') = Q(t - r/v)$. V frekvenčnem prostoru pomeni opisana zakasnitev fazni zasuk $\varphi = -kr$, kjer minus pomeni zaostajanje faze.

Diferencialna enačba drugega reda zahteva dve neodvisni rešitvi, v opisanem primeru s členoma e^{+jkr} in e^{-jkr} . Člen e^{+jkr} fizikalno ni smiseln, ker je potencial $V(\vec{r})$ posledica elektrine Q , torej sme biti kvečjemu zakasnen. Fizikalno torej zadošča rešitev e^{-jkr} in ena sama

pripadajoča konstanta C .

V notranjosti kroglice $r < r_0$ smemo poskusiti z enako rešitvijo za potencial $V(\vec{r})$, čeprav elektrina $\rho(\vec{r})$ tam ne bo prav povsod enaka nič. Česar v notranjosti kroglice ne znamo narediti, v singularnosti v koordinatnem izhodišču ne znamo izračunati diferencialnih operacij $\text{grad } V$ niti ΔV . Valovno enačbo zato integriramo po celotni prostornini V' kroglice.

Izračun ΔV v singularnosti v koordinatnem izhodišču zaobidemo tako, da integral po prostornini V' kroglice pretvorimo s pomočjo Gaussovega izreka v integral po površini kroglice A' , kjer ni singularnosti in znamo izračunati $\text{grad } V$. Sam potencial V smemo integrirati po celotni prostornini kroglice singularnosti navkljub, saj je vrednost integrala omejena in gre proti nič, če kroglico manjšamo v nič $r_0 \rightarrow 0$.

V opisani nalogi opazimo, da nam primanjkuje različnih črk! Črko V uporabljamo tako za potencial kot za prostornino kroglice, zato slednjo označimo z V' . Črko A uporabljamo tako za vektorski potencial \vec{A} kot za površino, zato slednjo označimo z A' . Končno, črko ρ uporabljamo tako za gostoto elektrine kot za valjno koordinato, ki v opisani nalogi na srečo ne nastopa.

Integracija desne strani valovne enačbe je preprosta, seštejemo vse elektrine znotraj kroglice. Za eno samo točkasto elektrino Q v koordinatnem izhodišču dobimo $-Q/\epsilon$. Z manjšanjem kroglice v nič $r_0 \rightarrow 0$ dobimo iskano konstanto $C = Q/(4\pi\epsilon)$. Rešitev valovne enačbe za skalarni potencial ene same točkaste elektrine Q v koordinatnem izhodišču se torej glasi:

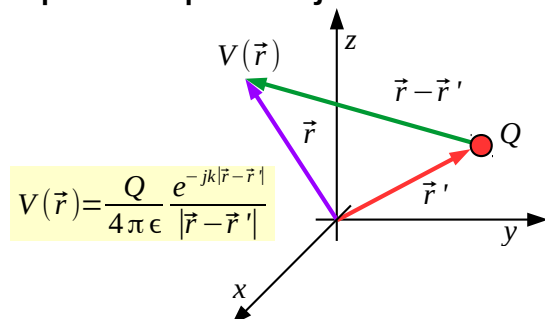
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr}$$

Opisano rešitev valovne enačbe lahko takoj posplošimo za elektrino Q na poljubnih koordinatah \vec{r}' tako, da prestavimo izhodišče koordinatnega sistema. Razdaljo r tedaj nadomesti izraz $|\vec{r} - \vec{r}'|$.

Ker je valovna enačba linearna, je vsota veljavnih rešitev prav tako rešitev iste enačbe. Izraz za potencial ene točkaste elektrine smemo torej razširiti na vsoto potencialov več točkastih elektrin $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ na pripadajočih koordinatah $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \dots$

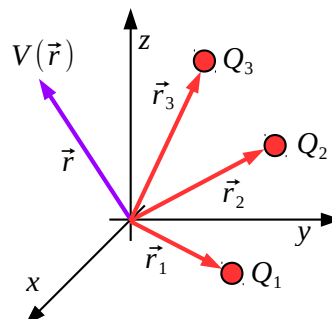
Končno lahko vsoto točkastih elektrin $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ prevedemo na integral prostorske elektrine $\rho(\vec{r}')$:

Splošen položaj elektrine



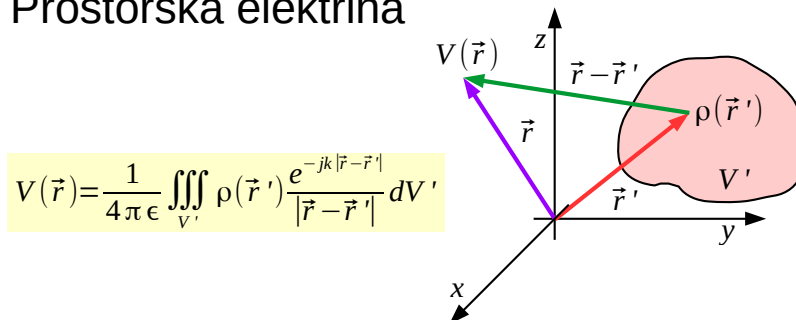
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Več elektrin



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i Q_i \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Prostorska elektrina



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Valovno enačbo za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ razstavimo na komponente v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z) . Konstantni smerni vektorji slednjega omogočajo preprosto razstavljanje vektorskega Laplace $\Delta \vec{A}(\vec{r})$. Dobimo tri skalarne valovne enačbe:

$$\Delta A_x(\vec{r}) + k^2 A_x(\vec{r}) = -\mu J_x(\vec{r})$$

$$\Delta A_y(\vec{r}) + k^2 A_y(\vec{r}) = -\mu J_y(\vec{r})$$

$$\Delta A_z(\vec{r}) + k^2 A_z(\vec{r}) = -\mu J_z(\vec{r})$$

Matematično povsem enakovredno skalarno valovno enačbo za $V(\vec{r})$ smo že rešili. Torej uporabimo isti postopek reševanja tudi za tri skalarne enačbe za komponente vektorskega potenciala $A_x(\vec{r})$, $A_y(\vec{r})$ in $A_z(\vec{r})$. Dobimo tri obrazce za izračun komponent:

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} J_x(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} J_y(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} J_z(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Vse tri rešitve lahko preprosto združimo v vektorski zapis, ki velja v poljubnem, tudi krivočrtnem koordinatnem sistemu:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Končni obrazec za izračun vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ je torej silno podoben obrazcu za izračun skalarne potenciala $V(\vec{r})$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Oba gornja obrazca imata skupno ime obrazca za zakasnjena potenciala (angleško: retarded potentials). Ime zakasnjena potenciala izvira iz strogega upoštevanja zakasnitve učinka izvora v točki opazovanja potenciala, kar zahteva relativistika.

Med valovnimi enačbama za vektorski in skalarni potencial ter obrazcema za izračun vektorskega in skalarne potenciala je nekaj pomembnih razlik. Valovni enačbi veljata v poljubni točki prostora s koordinatami \vec{r} . Izvora $\vec{J}(\vec{r})$ in $\rho(\vec{r})$ imata iste koordinate kot potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ v valovnih enačbah. Rešitev diferencialne valovne enačbe ni samoumevna. Diferencialna enačba naleti na težave ob singularnostih.

Obrazca za izračun vektorskega in skalarne potenciala uporabljata dvojje različnih koordinat. Koordinate izvorov \vec{r}' so označene s črtico kot tudi pripadajoča prostornina V' in podobno. Koordinate izračunanih potencialov so označene brez črtic \vec{r} . Koordinate izvorov \vec{r}' so pri tem popolnoma neodvisne od koordinat potencialov \vec{r} . Pri odvajanju ali

integriranju moramo zato paziti, s katerimi koordinatami računamo: s položajem virov \vec{r}' ali s položajem učinkov (potencialov) \vec{r} ?

Integriranje je samoumevno seštevaje učinkov več izvorov. Integriranje je zelo odporno na singularnosti. Integracijo gostote elektrine $\rho(\vec{r})$ zlahka prevedemo na vsoto točkastih elektrin Q_i . Prostorsko integracijo gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ zlahka prevedemo na enodimenzijsko integracijo vzdolž žice, ki vodi tok I .

Obrazca za zakasnjena potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ ne vsebujeta vrtinčenja. Do točnega električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ torej lahko pridemo v elektrodinamiki brez magnetnih veličin in brez pravila desnega vijaka! V obrazcu za izračun električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ iz potencialov $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \text{grad } V(\vec{r})$$

nastopajo samo še koordinate točke \vec{r} , kjer v isti točki prostora hkrati opazujemo potenciala in polje. Smerni odvod v gornjem obrazcu za $\vec{E}(\vec{r})$ torej računamo po koordinatah \vec{r} !

* * * * *