

Frekvenčni prostor in kazalci

Obravnava elektrotehnične naloge je v časovnem prostoru povsem nazorna. Trenutne fizikalne veličine, na primer napetost $u(t)$ in tok $i(t)$, so natančno tisto, kar vidimo na zaslonu osciloskopa. Časovno odvisnost namenoma poudarimo z zapisom veličin z malimi črkami. Reševanje enačb tudi s povsem linearnimi gradniki žal v časovnem prostoru ni preprosto. Obnašanje gradnikov, ki lahko hranijo energijo, na primer tuljav L oziroma kondenzatorjev C , opisujejo odvodi oziroma integrali vpletenih veličin.

Matematiki se reševanju linearnih enačb z odvodi in integrali spretno izognejo z integralskimi transformacijami. Obnašanju linearnega vezja pri krmiljenju s harmonskimi (sinusnimi) signali se dobro prilega Fourier-jeva transformacija v frekvenčni prostor s krožno (realno) frekvenco ω . Za obravnavo prehodnih pojavov v linearnih vezjih je primernejša Laplace-jeva transformacija s kompleksno frekvenco $s = \sigma + j\omega$. V obeh primerih se časovni odvodi oziroma integrali preslikajo v množenje oziroma deljenje s frekvenco:

Časovni prostor

Fourier

Laplace

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad F(s) = \int f(t) e^{-st} dt$$

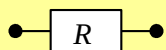
$$j = \sqrt{-1}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\frac{d}{dt} f(t) \longleftrightarrow j\omega \cdot F(\omega) \qquad s \cdot F(s)$$

$$\int f(t) dt \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega) \qquad \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

$$u(t) = R \cdot i(t)$$



$$U(\omega) = R \cdot I(\omega)$$

$$U(s) = R \cdot I(s)$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$



$$U(\omega) = j\omega L \cdot I(\omega)$$

$$U(s) = sL \cdot I(s)$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$



$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega C} \cdot I(\omega)$$

$$U(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s)$$

Jasno moramo pri kateremkoli integriranju meje postaviti tako, da je na

mejah integracije energija v gradnikih, tuljavah L in kondenzatorjih C enaka nič oziroma upoštevana v dodatnih integracijskih konstantah. Na primer, začetno energijo v kondenzatorju upoštevamo kot dodatno napetost U_0 , ki jo prištejemo integralu za napetost na kondenzatorju. Pri uporabi integralni transformacij se jasno vprašamo, kaj v resnici pomenijo nove veličine, spektri $I(\omega)$ in $U(\omega)$ oziroma $I(s)$ in $U(s)$ v pripadajočem frekvenčnem prostoru ter kako jih izmerimo?

Najpreprostejši zgled je krmiljenje vezja s harmonskim virom ene same frekvence ω . Izmenično napetost $u(t)$ tedaj opisujeta dva realna podatka: amplituda U in pripadajoči fazni kot φ_U . Izraz $\cos(\omega t + \varphi_U)$ lahko zapišemo tudi kot realni del kompleksne eksponentne funkcije. Oba realna podatka U in φ_U , ki imata jasno določen fizikalni pomen, združimo v eno samo kompleksno število \hat{U} , ki ga imenujemo kazalec (angleško: phasor) napetosti:

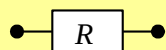
$$u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varphi_U) = \operatorname{Re}[U \cdot e^{j\varphi_U} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\hat{U} \cdot e^{j\omega t}]$$

$$i(t) = I \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) = \operatorname{Re}[I \cdot e^{j\varphi_I} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\hat{I} \cdot e^{j\omega t}]$$

Kazalci

$$\hat{U} = U \cdot e^{j\varphi_U}$$

$$\hat{I} = I \cdot e^{j\varphi_I}$$



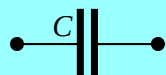
$$u(t) = R \cdot i(t) = \operatorname{Re}[R \cdot \hat{I} \cdot e^{j\omega t}]$$

$$\hat{U} = R \cdot \hat{I}$$



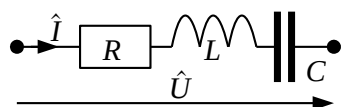
$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \operatorname{Re}[L \cdot \hat{I} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}]$$

$$\hat{U} = j\omega L \cdot \hat{I}$$



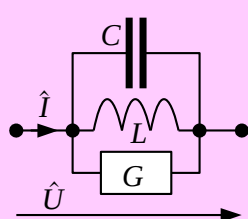
$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{C} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\hat{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \hat{I}$$



$$\hat{U} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \hat{I} = Z \cdot \hat{I}$$

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + jX$$



$$\hat{I} = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + G\right) \cdot \hat{U} = Y \cdot \hat{U}$$

$$G = 1/R$$

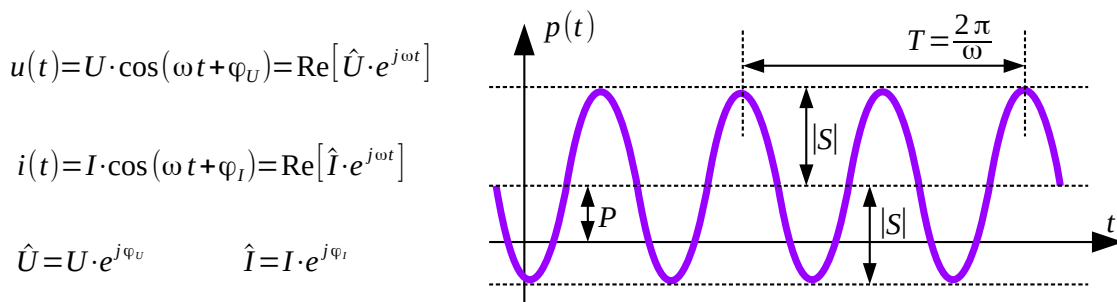
$$Y = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + G = G + jB$$

Računanje s kazalci \hat{U} in \hat{I} postane z izjemo uporabe kompleksnih števil silno enostavno. Časovne odvode oziroma integrale zamenja množenje oziroma deljenje z $j\omega$. Integracijske konstante, energije v tuljavah L in v kondenzatorjih C , smemo zanemariti, saj pri eni sami frekvenci ω opazujemo ustaljeno (stacionarno) stanje vezja, ko je kakršenkoli prehodni

pojav že izzvenel.

Pri računu s kazalci je smiselno uvesti nova pojma impedance Z in admittance Y . Impedanca Z je kompleksna upornost, ki vključuje realno upornost R in imaginarno reaktanco jX . Admitanca Y je kompleksna prevodnost, ki vključuje realno prevodnost G in imaginarno susceptanco jB . Imaginarni veličini reaktanca jX oziroma susceptanca jB opisujeta gradnike, ki hranijo energijo: tuljave L in kondenzatorje C . Takšne gradnike imenujemo reaktivni gradniki.

Preprost račun s kazalci oziroma spektri integralnih transformacij odpove, ko trčimo ob nelinearno nalogo. Najpogostejša nelinearna naloga je izračun moči. V časovnem prostoru je trenutna moč $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ zmnožek trenutne napetosti in toka. Pri harmonskem krmiljenju trenutna moč niha z dvakratno frekvenco 2ω kot posledica kvadratne naloge, množenja napetosti in toka. Moč lahko v določenih trenutkih postane tudi negativna, ko tuljave L in kondenzatorji C vračajo vskladiščeno energijo nazaj viru:



$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U \cdot I \cdot \cos(\omega t + \varphi_U) \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) = \frac{U \cdot I}{2} \cdot [\cos(\varphi_U - \varphi_I) + \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)]$$

Kompleksna moč

$$S = P + jQ = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} = \frac{U \cdot e^{j\varphi_U} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_I}}{2} = \frac{U \cdot I}{2} \cdot e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}$$

Navidezna moč

$$|S| = \left| \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} \right| = \frac{U \cdot I}{2} = \frac{p(t_{MAX}) - p(t_{MIN})}{2}$$

Delovna moč

$$P = \langle p(t) \rangle = \text{Re} \left[\frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} \right] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \text{Re} [e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_I)$$

Jalova moč

$$Q = \text{Im} \left[\frac{\hat{U} \cdot \hat{I}^*}{2} \right] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \text{Im} [e^{j(\varphi_U - \varphi_I)}] = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \sin(\varphi_U - \varphi_I)$$

Pri računanju s kazalci \hat{U} in \hat{I} je smiselno uvesti nov pojem kompleksne moči $S = P + jQ$. Pri izračunu moči je pomembna razlika med faznim kotom napetosti in toka $\varphi_U - \varphi_I$. Na primer, kompleksna moč na upor R je povsem delovna in večja od nič, razlika med faznima kotoma

$\varphi_U - \varphi_I = 0$ je tedaj enaka nič. Reaktivni gradniki, tuljave L in kondenzatorji C , samo hranijo energijo, ne trošijo pa nobene moči, zato je kompleksna moč na njih povsem jalova in znaša razlika med faznima kotoma $\varphi_U - \varphi_I = \pm \pi/2$.

Razliko faznega kota dobimo z množenjem kazalca napetosti \hat{U} s konjugirano-kompleksno vrednostjo kazalca toka \hat{I}^* . Ker kazalca \hat{U} in \hat{I}^* vsebujeta amplitudi, torej vršni vrednosti harmonske napetosti in toka, moramo rezultat za moč deliti z dva! Deljenje z dva neposredno sledi iz izračuna povprečne moči $\langle p(t) \rangle$, ko izločimo nihanje moči z dvojno frekvenco 2ω .

V praksi pogosto uporabljamo efektivni vrednosti toka $I_{eff} = I/\sqrt{2}$ in napetosti $U_{eff} = U/\sqrt{2}$, da se izognemo deljenju z dva pri računanju moči. Podobno lahko definiramo tudi kazalca $\hat{I}_{eff} = \hat{I}/\sqrt{2}$ in $\hat{U}_{eff} = \hat{U}/\sqrt{2}$. Pri navajanju oziroma uporabi podatkov v praksi moramo biti zelo previdni, kaj točno mislimo: amplitudo (vršno vrednost) z merskimi enotami V ali efektivno vrednost z merskimi enotami V_{eff} ?

Da je zmešnjava popolna, obstajata poleg amplitude in efektivne vrednosti še dve dodatni merski enoti za napetost. Napetost vrh-vrh je za harmonski signal točno dvojna amplituda $U_{pp} = 2U$ in jo merimo v enotah V_{pp} (volts peak-to peak). Napetost »emf« (angleško electro-motive force) je efektivna napetost odprtih sponk vira, ki ima notranjo impedanco $Z_g = Z_K$ enako dogovorjeni karakteristični impedanci. Ko je takšen vir priključen na breme $Z_b = Z_K$, velja $U_{emf} = U_g = 2U_{eff}$. Pripadajoča merska enota V_{emf} se uporablja za opis občutljivosti radijskega sprejemnika.

Realni del kompleksne moči $S = P + jQ$ je delovna moč $P = \langle p(t) \rangle$ oziroma dolgotrajno časovno povprečje trenutne moči. Navidezna moč $|S|$ opisuje amplitudo nihanja trenutne moči $p(t)$ z dvakratno frekvenco 2ω okoli povprečja $P = \langle p(t) \rangle$. Imaginarni del kompleksne moči $S = P + jQ$ je jalova moč Q , torej merilo za vskladiščeno energijo v reaktivnih gradnikih: tuljavah L in kondenzatorjih C .

V frekvenčnem prostoru so slabljenja in ojačanja lahko zelo visoka razmerja z razponom tudi več kot 10^{12} . Povrhu rešitev telegrafske enačbe in številnih drugih nalog navajajo slabljenje v logaritemskih enotah.

Logaritemske merske enote Nepri in decibeli so zato zelo priljubljene in praktično uporabne:

Neper

$$a_{Np} = \ln \frac{|\hat{U}_1|}{|\hat{U}_2|}$$

$$P = \frac{|\hat{U}|^2}{2Z_K} \quad |\hat{U}| = \sqrt{2Z_K P}$$

$$a_{Np} = \ln \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Decibel

$$a_{dB} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$a_{dB} = 10 \cdot \log \left| \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} \right|^2 = 20 \cdot \log \left| \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} \right|$$

$$a_{dB} = \frac{20}{\ln 10} \cdot \ln \left| \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} \right| = \frac{20}{2.3026} \cdot a_{Np}$$

Logaritemske enote za moč

$$P_{dBm} = 10 \cdot \log \frac{P}{1 \text{ mW}} \quad P_{dBW} = 10 \cdot \log \frac{P}{1 \text{ W}}$$

$$1 \text{ kW} = 60 \text{ dBm} = 30 \text{ dBW}$$

$$1 \text{ W} = 30 \text{ dBm} = 0 \text{ dBW}$$

$$1 \text{ mW} = 0 \text{ dBm} = -30 \text{ dBW}$$

$$1 \mu \text{ W} = -30 \text{ dBm} = -60 \text{ dBW}$$

$$1 \text{ nW} = -60 \text{ dBm} = -90 \text{ dBW}$$

$$1 \text{ pW} = -90 \text{ dBm} = -120 \text{ dBW}$$

$$1 \text{ fW} = -120 \text{ dBm} = -150 \text{ dBW}$$

Logaritemske merske enote

Nepri [Np] navajajo slabljenje a_{Np} oziroma ojačanje kot naravni logaritem razmerja amplitud napetosti (toka, polja, pritiska, hitrosti). Ker so pri izbrani (karakteristični) impedanci Z_K moči sorazmerne kvadratom pripadajočih amplitud, moramo razmerje moči koreniti oziroma razpoloviti rezultat naravnega logaritma. Rešitve telegrafske enačbe in drugih nalog dajejo rezultat kot naravni logaritem razmerja amplitud, torej so Nepri tu naravna merska enota.

Decibeli [dB] navajajo slabljenje a_{dB} oziroma ojačanje kot desetkratnik desetiškega logaritma (delovne) moči. Pri izbrani (karakteristični) impedanci Z_K moramo za izračun decibelov razmerje amplitud najprej kvadrirati oziroma pomnožiti desetiški logaritem razmerja amplitud z 20. Decibeli uporabljajo vsem preprosto razumljiv desetiški logaritem, razmerje moči pri tem ni vezano na neko karakteristično impedanco.

Pri pretvorbi iz Neprov v decibele upoštevamo drugačno osnovo logaritma, pretvorbo razmerja amplitud v razmerje moči in dogovorjeni desetkratnik za decibele. Decibel je mišljen kot desetina (deci) merske enote

Bell. Skupaj dobimo faktor $20/\ln 10$. Obratno vrednost istega faktorja uporabljamo pri pretvorbi iz decibelov v Nepre.

Logaritemske merske enote pogosto uporabljamo tudi za moči, napetosti, tlake (zvoka) in druge fizikalne veličine. Ker logaritem deluje na razmerje, si moramo izbrati neko referenčno moč, napetost itd, glede na katero zapišemo razmerje v decibelih. Pri tem je najpogostejše uporabljana merska enota $[\text{dBm}]$ za električno moč v primerjavi z referenčno močjo $P_{REF} = 1 \text{ mW}$.

Manj znana, a bolj smiselna enota za električno moč je $[\text{dBW}]$, to je moč glede na referenco $P_{REF} = 1 \text{ W}$. Merska enota $[\text{dB}\mu\text{V}]$ lahko pomeni napetost oziroma moč. Moč je mišljena v razmerju z referenčno močjo, ki jo predstavlja napetost $U_{eff} = 1 \mu\text{V}_{eff}$ na karakteristični impedanci $Z_K = 75 \Omega$.

V elektrodinamiki si pogosto ne moremo privoščiti zgoraj opisanega razkošja črk in oznak frekvenčnega prostora. Ko želimo izrecno poudariti kazalce, pripadajoči veličini \hat{U} in \hat{I} zapisujemo s strešicami nad velikimi črkami, da jih razlikujemo od enosmernih veličin oziroma amplitud U in I . V večini nalog elektrodinamike si razkošja dodatnih strešic ne želimo. Ko za določene veličine natančno vemo, da so kazalci, zanje uporabljamo kar velike črke brez strešic. Na primer, U in I v takšni nalogi pomenita kazalce!

Podobno si ne moremo privoščiti uporabe treh različnih črk P , Q in S samo za zapis kompleksne moči. V elektrodinamiki uporabljamo veliko črko P kar za kompleksno moč. $\text{Re}[P]$ je tedaj delovna moč, $|P|$ navidezna moč in $\text{Im}[P]$ jalova moč. Veliko črko S v elektrodinamiki najpogostejše uporabljamo za gostoto kompleksne moči na enoto površine z merskimi enotami W/m^2 . Realni del, velikost in imaginarni del pomenijo gostoto delovne moči $\text{Re}[S]$, gostoto navidezne moči $|S|$ in gostoto jalove moči $\text{Im}[S]$.

Končno je težava še s kazalci, ki jih nemarneži v tuji literaturi imenujejo kar vektorji namesto pravilnega angleškega izraza phasor. Vektorji so nekaj povsem drugega, potrebujemo jih za opis nekaterih fizikalnih veličin v tridimenzijskih nalogah. V elektrodinamiki pogosto naletimo na veličine, ki so hkrati vektorji in kazalci, na primer izmenično (harmonsko) električno polje \vec{E} . Kaj takrat točno pomeni izraz $|\vec{E}|$, je treba razvozljati iz pripadajočega besedila oziroma smisla naloge: velikost vektorja (kompleksni

skalar), velikost kazalca (realni vektor) ali oboje (realni skalar)?

* * * * *