

### 3. Osnovni viri sevanja

Pojave mirujočih električnih nabojev opisuje elektrostatika. Relativistika zahteva dodatne pojave enakomerno gibajočih električnih nabojev, kar običajno imenujemo magnetostatika. Relativistika še dodatno zahteva, da pospešeni električni naboji sevajo elektromagnetno valovanje. Pospešeno gibanje vključuje tudi kroženje oziroma nihanje.

Gibanje elektronov predstavlja prevodniški tok oziroma konvektivni tok. Hitrost gibanja  $\vec{v} \neq 0$  mora biti dovolj velika, da magnetne pojave sploh opazimo v ozadju elektrostatike. Preprost primer pospešenega gibanja sta izmenični prevodniški tok oziroma izmenični konvektivni tok. Frekvenca izmeničnega toka  $\omega \neq 0$  mora biti dovolj visoka, da elektromagnetno sevanje sploh opazimo v ozadju elektrostatike in magnetostatike.

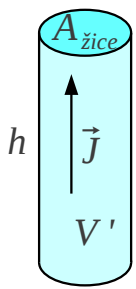
Pojav sevanja elektromagnetnega valovanja razložimo na preprostih osnovnih virih sevanja. Izbrani zgledi so sicer neučinkovite antene, ker so majhni  $d \ll \lambda$  v primerjavi z valovno dolžino, na primer Teslov transformator ali feritna antena. Večje ter predvsem učinkovitejše antene sestavimo iz vsote številnih majhnih osnovnih virov sevanja oziroma integrala diferencialno majhnih osnovnih virov sevanja.

Preprosti zgledi električno majhnih anten so torej osnovni viri sevanja. Delovanje slednjih moramo natančno preučiti, da lahko razumemo delovanje vseh večjih anten. Osnovni vir sevanja postavimo v izhodišče krogelnega koordinatnega sistema  $(r, \Theta, \Phi)$  in ga zasukamo tako, da je obravnava najenostavnejša. Osnovni viri sevanja običajno omogočajo rotacijsko simetrijo  $\partial/\partial\Phi = 0$ , da so vse veličine funkcija samo preostalih dveh krogelnih koordinat  $r$  in  $\Theta$ .

Zelo pomemben osnovni vir sevanja je tokovni element, to je kratek košček kovinske žice dolžine  $h$  s prevodniškim tokom  $I$ . Statično magnetno polje tokovnega elementa opisuje Biot-Savartov zakon. V njegovi izvorni obliki Jean-Baptiste Biot in Félix Savart leta 1820 nista upoštevala elektromagnetnega sevanja.

Točno magnetno polje tokovnega elementa izračunamo v elektrodinamiki preko računskega obrazca za zakasneni vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$ . Tokovni element postavimo v izhodišče krogelnega koordinatnega sistema  $(r, \Theta, \Phi)$  in žico usmerimo v os  $z$  za rotacijsko simetrijo  $\partial/\partial\Phi = 0$ . Prevodniški tok  $I$  ponazorimo z vektorjem gostote toka

$\vec{J}(\vec{r}')$  v prostornini žice  $V'$  :



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{1}_z \frac{I}{A_{\text{žice}}} \quad dV' = A_{\text{žice}} dz'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{1}_z I \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dz'$$

Poenostavitve:

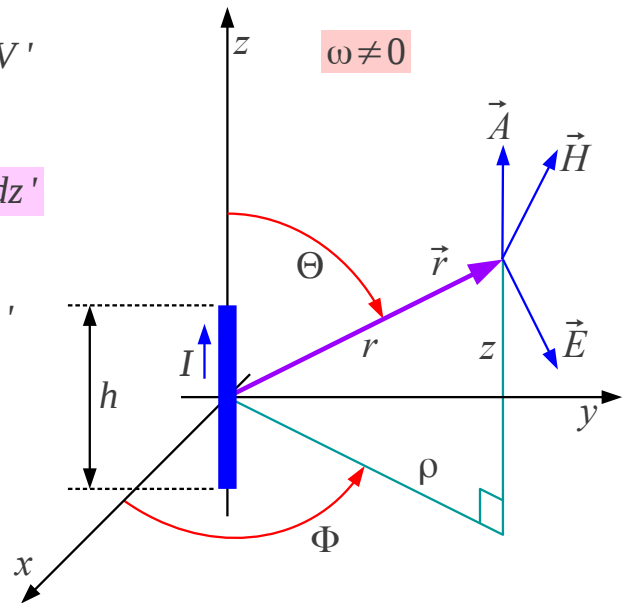
$$(1) \quad h \ll r \rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

$$(2) \quad h \ll \lambda = \frac{2\pi}{k} \rightarrow e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{-jkr}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{1}_z \frac{\mu I h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} = (\vec{1}_r \cos \Theta - \vec{1}_\Theta \sin \Theta) \frac{\mu I h}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\vec{1}_z = \vec{1}_r \cos \Theta - \vec{1}_\Theta \sin \Theta$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{1}_\Phi \frac{I h}{4\pi} e^{-jkr} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta$$



Sevanje

Biot-Savart

Tokovni element

Pri računu upoštevamo poenostavitve, da je žica  $h$  kratka in njen presek  $A_{\text{žice}}$  še manjši. Tokovni element je kratek  $h \ll r$  v primerjavi z oddaljenostjo točke opazovanja in hkrati kratek  $h \ll \lambda$  v primerjavi z valovno dolžino. Slednji pogoj omogoča doseganje skoraj konstantne gostote toka  $\vec{J}(\vec{r}') = \text{konst.}$  tudi v praktični napravi. Znameniti Teslov transformator popolnoma ustreza vsem omenjenim zahtevam!

Poenostavitev  $h \ll r$  dopušča, da pri integraciji zanemarimo spreminjanje amplitude v integralu. Poenostavitev  $h \ll \lambda$  dopušča, da pri integraciji zanemarimo spreminjanje faze v integralu. Obe poenostavitvi skupaj dopuščata, da integral po prostornini žice  $V'$  zamenjamo s preprostim produktom veličin. V končnem rezultatu za vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$  moramo samo še zamenjati smernik  $\vec{1}_z$  kartezičnega koordinatnega sistema  $(x, y, z)$  s smerniki krogelnega koordinatnega sistema  $(r, \Theta, \Phi)$ .

Magnetno poljsko jakost  $\vec{H}(\vec{r}) = 1/\mu \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$  dobimo po definiciji z

izračunom vrtnčenja vektorskega potenciala. Končni rezultat pogosto imenujemo tudi razširjeni oziroma dopolnjeni Biot-Savartov zakon. Poleg samoumevne zakasnitve  $e^{-jkr}$  omejene hitrosti svetlobe in statičnega člena  $1/r^2$  izvirnega Biot-Savartovega zakona vsebuje točen rezultat še sevalni člen  $jk/r$  v elektrodinamiki!

V magnetostatiki  $\omega=0$  izgineta oba: fazni zasuk zakasnitve in sevalni člen zaradi  $k=\omega\sqrt{\mu\epsilon}=0$ . Izvirni Biot-Savartov zakon torej natančno velja v magnetostatiki in ostaja uporaben pri nizkih frekvencah na majhnih razdaljah. Pri visokih frekvencah oziroma na velikih razdaljah postane sevalni člen  $jk/r$  znatno večji od statičnega člena  $1/r^2$ .

Izvirni Biot-Savartov zakon velja samo v primeru, ko več odsekov žice sestavimo v sklenjeno zanko, saj električni tok ne more izvirati iz nič niti ponirati v nič. Izvirni Biot-Savartov zakon nič ne govori o električnem polju  $\vec{E}(\vec{r})$ , saj to ni stvar magnetostatike. Izračun  $\vec{E}(\vec{r}) = 1/j\omega\epsilon \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r})$  po Ampèrovem zakonu v okolici žice brez tokov  $\vec{J}(\vec{r})=0$  daje rezultat:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{Ih}{4\pi j\omega\epsilon} e^{-jkr} \left[ \vec{1}_r \left( \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2\cos\Theta + \vec{1}_\Theta \left( -\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin\Theta \right]$$

Zveznost  
toka / elektrine  
 $I = j\omega Q$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qh}{4\pi} e^{-jkr} \left[ \vec{1}_r \left( \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2\cos\Theta + \vec{1}_\Theta \left( -\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin\Theta \right]$$

$$\frac{1}{\omega\epsilon} = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{Z}{k}$$

Točkasti statični električni dipol

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^* = \frac{|I|^2 h^2 Z}{32\pi^2 k} \left[ \vec{1}_r \left( \frac{k^3}{r^2} - \frac{j}{r^5} \right) \sin^2\Theta + \vec{1}_\Theta \left( \frac{jk^2}{r^3} + \frac{j}{r^5} \right) 2\cos\Theta \sin\Theta \right]$$

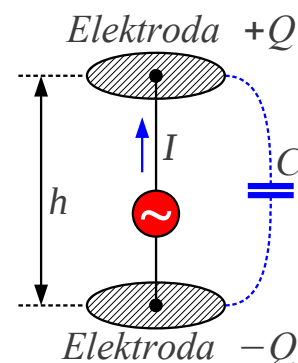
Sevanje

$$P = \oint_{r \rightarrow \infty} \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_r r^2 \sin\Theta d\Theta d\Phi = \frac{|I|^2 h^2 Z k^2}{12\pi}$$

$$R_s = \frac{2P}{|I|^2} = \frac{Zk^2 h^2}{6\pi} = \frac{2\pi Z}{3} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2$$

Dinamični električni dipol

$$h \ll \lambda \rightarrow R_s \ll \frac{1}{\omega C}$$



V točni obravnavi elektrodinamike zveznost toka in elektrine zahteva, da izvor toka povzroči primanjkljaj elektrine, ponor toka pa kopičenje elektrine

na koncu žice  $I = dQ/dt = j\omega Q$ . Če v izpeljanem izrazu za električno polje nadomestimo tok s pripadajočo elektrino na koncu žice, dobimo polje točkastega električnega dipola. V neposredni bližini naprave sta statična člena polja električnega dipola izredno velika.

Električno polje  $|\vec{E}(\vec{r})| \gg Z|\vec{H}(\vec{r})|$  je v bližini vira dosti večje od magnetnega polja v merilu valovne impedance prostora  $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ . Čeprav izpeljava začenja z Biot-Savartovim zakonom za magnetno polje, je tokovni element v resnici točkasti dinamični električni dipol. Poskus potrjuje teorijo: Teslov transformator proizvaja v svoji neposredni okolici ogromno električno polje in čudovite iskre.

Kaj pomenijo različni členi električnega in magnetnega polja, nam nazorno opiše Poyntingov vektor gostote pretoka moči  $\vec{S}(\vec{r})$ . Sevalni členi električnega in magnetnega polja dajejo od nič različno  $\text{Re}[\vec{S}(\vec{r})] \neq 0$  realno komponento Poyntingovega vektorja. Slednja pomeni delovno moč, ki se iz vira širi v prostor v neskončnost.

Elektrostatika oziroma magnetostatika dopuščata samo jalovo moč, električno oziroma magnetno energijo, ki niha v okolici naprave. Opisana delovna moč  $P(r \rightarrow \infty)$ , ki se širi v neskončnost in se nikoli več ne vrne, nima razlage niti v elektrostatiki niti v magnetostatiki. Novi pojav imenujemo elektromagnetno sevanje in je posledica pospešenega gibanja elektronov.

Praktično napravo izdelamo tako, da oba konca žice zaključimo na kovinskih elektrodah ("kapa" Teslovega transformatorja). Kapacitivnost med elektrodama omogoča, da po žici poženemo tok z izmeničnim generatorjem. Tudi če izdelamo žico iz superprevodnika brez električne upornosti, generator občuti poleg reaktivne impedance kondenzatorja  $X_C = -1/\omega C$  tudi povsem delovno sevalno upornost  $R_S > 0$ . Slednja ne pomeni pretvarjanja električne moči v toploto, pač pa zagotavlja moč elektromagnetnemu sevanju, ki se širi v prostor v neskončnost.

Pri majhnih napravah  $h \ll \lambda$  je sevalna upornost  $R_S \ll |X_C|$  zelo majhna v primerjavi z jalovo impedanco kondenzatorja. Nikola Tesla je kapacitivnost kompenziral z induktivnostjo sekundarnega navitja transformatorja na rezonančni frekvenci  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Upornost navitja

$R_{Cu} \gg R_S$  je za več velikostnih razredov višja od sevalne upornosti, zato slednje ni moč opaziti, kaj šele izmeriti. Teslov transformator večino električne moči pretvori v toploto v navitjih oziroma jo odda porabnikom v neposredni bližini preko kapacitivnega sklopa, seva pa zelo malo!

Nekoliko drugačen osnovni vir sevanja je majhna  $\sqrt{A'} \ll \lambda$  krožna tokovna zanka iz kovinske žice s prevodniškim tokom  $I$ . Točno magnetno polje  $\vec{H}(\vec{r})$  tokovne zanke izračunamo v elektrodinamiki po računskem obrazcu za zakasneni vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$ . Krožno zanko postavimo v izhodišče krogelnega koordinatnega sistema  $(r, \Theta, \Phi)$  v ravnino  $xy$  tako, da os zanke sovpada z osjo  $z$  za rotacijsko simetrijo  $\partial/\partial\Phi=0$ . Prevodniški tok  $I$  ponazorimo z vektorjem gostote toka  $\vec{J}(\vec{r}')$  v prostornini žice  $V'$ :

Tokovna zanka

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(r \sin \Theta \cos \Phi - a \cos \Phi')^2 + (r \sin \Theta \sin \Phi - a \sin \Phi')^2 + (r \cos \Theta)^2}$$

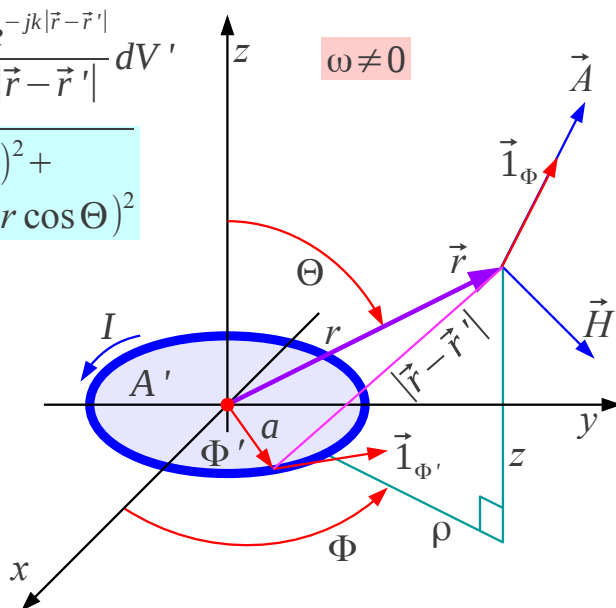
$$\vec{J}(\vec{r}') = \vec{1}_{\Phi'} \frac{I}{A_{\text{žice}}}$$

$$dV' = A_{\text{žice}} a d\Phi'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \vec{1}_{\Phi'} I \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} a d\Phi'$$

$$\vec{1}_{\Phi'} = -\vec{1}_x \sin \Phi' + \vec{1}_y \cos \Phi'$$

$$-\vec{1}_x \sin \Phi + \vec{1}_y \cos \Phi = \vec{1}_{\Phi}$$



$$\omega \neq 0$$

Poenostavitve:

$$(1) \quad a \ll r \rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{a}{r} \sin \Theta \cos(\Phi - \Phi') \right]$$

$$(2) \quad a \ll \lambda \rightarrow e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{-jkr} \left[ 1 + jka \sin \Theta \cos(\Phi - \Phi') \right]$$

Površina zanke

$$A' = \pi a^2$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{1}_{\Phi} \frac{\mu}{4\pi} I (\pi a^2) e^{-jkr} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta = \vec{1}_{\Phi} \frac{\mu}{4\pi} I A' e^{-jkr} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta$$

Pri računu upoštevamo poenostavitve, da je krožna zanka polmera  $a$  majhna in presek žice  $A_{\text{žice}}$  še manjši. Tokovna zanka je kratka  $a \ll r$  v primerjavi z oddaljenostjo točke opazovanja in hkrati kratka  $a \ll \lambda$  v primerjavi z valovno dolžino. Slednji pogoj omogoča doseganje skoraj konstantne gostote toka  $\vec{J}(\vec{r}') = \text{konst.}$  tudi v praktični napravi.

Poenostavitev  $a \ll r$  dopušča, da pri integraciji poenostavimo spreminjanje amplitude v integralu na dva največja člena vrste. Poenostavitev  $a \ll \lambda$  dopušča, da pri integraciji poenostavimo spreminjanje faze v

integralu na dva največja člena vrste. Smernik  $\vec{1}_{\Phi'} = -\vec{1}_x \sin \Phi' + \vec{1}_y \cos \Phi'$  zapišemo s konstantnima smernikoma kartezičnega koordinatnega sistema  $(x, y, z)$ , da vse integrirane veličine vsebujejo le kotne funkcije integracijske spremenljivke  $\Phi'$ .

V končnem rezultatu integracije se največji členi natančno izničijo. Rezultat pretvorimo iz kartezičnih smernikov  $-\vec{1}_x \sin \Phi + \vec{1}_y \cos \Phi = \vec{1}_{\Phi}$  nazaj na smernik zemljepisne dolžine  $\Phi$  krogelnih koordinat. Ko veljata obe poenostavitvi  $a \ll r$  in  $a \ll \lambda$  ter je tok v zanki  $I = konst.$  konstanten, je končni rezultat za vektorski potencial  $\vec{A}(\vec{r})$  odvisen le od površine zanke  $A' = \pi a^2$ , popolnoma nič pa od njene oblike. Krožna, kvadratna, trikotna ali šest-oglatna zanka enake površine dajejo enak rezultat!

Magnetno poljsko jakost  $\vec{H}(\vec{r}) = 1/\mu \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$  dobimo po definiciji z izračunom vrtinčenja vektorskega potenciala. Rezultat ustreza polju točkastega dinamičnega magnetnega dipola:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{IA'}{4\pi} e^{-jkr} \left[ \vec{1}_r \left( \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2 \cos \Theta + \vec{1}_{\Theta} \left( -\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin \Theta \right]$$

Sevanje  
Točkasti statični magnetni dipol

$$\rho(\vec{r}') = 0 \rightarrow \text{grad } V(\vec{r}) = 0 \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) \quad \omega \mu = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = k Z$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{1}_{\Phi} \frac{j\omega \mu I A'}{4\pi} e^{-jkr} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \Theta = \vec{1}_{\Phi} \frac{Z I A'}{4\pi} e^{-jkr} \left( \frac{k^2}{r} - \frac{jk}{r^2} \right) \sin \Theta$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{|I|^2 (A')^2 Z}{32\pi} \left[ \vec{1}_r \left( \frac{k^4}{r^2} + \frac{jk}{r^5} \right) \sin^2 \Theta - \vec{1}_{\Theta} \left( \frac{jk^3}{r^3} + \frac{jk}{r^5} \right) 2 \cos \Theta \sin \Theta \right]$$

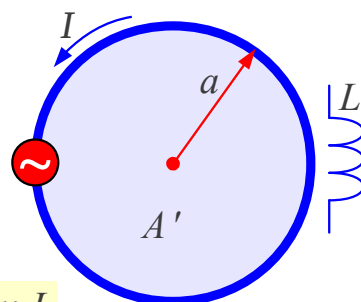
Sevanje

$$P = \oint_{r \rightarrow \infty} \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{1}_r r^2 \sin \Theta d\Theta d\Phi = \frac{|I|^2 (A')^2 Z k^4}{12\pi}$$

$$R_s = \frac{2P}{|I|^2} = \frac{Z k^4 (A')^2}{6\pi} = \frac{8\pi^3 Z}{3} \left( \frac{A'}{\lambda^2} \right)^2$$

Dinamični magnetni dipol

$$\sqrt{A'} \ll \lambda \rightarrow R_s \ll \omega L$$



Ker v sklenjeni zanki konstanten tok nikjer ne izvira niti ne ponira, na zanki ni mirujočih elektrin. Smerni odvod skalarnege potenciala

$\text{grad } V(\vec{r}) = 0$  je povsod v prostoru enak nič. Električno poljsko jakost  $\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}(\vec{r})$  preprosto dobimo zgolj iz vektorskega potenciala tokovne zanke.

Magnetno polje  $|\vec{H}(\vec{r})| \gg |\vec{E}(\vec{r})|/Z$  je v bližini vira dosti večje od električnega polja v merilu valovne impedance prostora  $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ . Kaj pomenijo različni členi električnega in magnetnega polja, nam tudi v primeru zanke nazorno opiše Poyntingov vektor gostote pretoka moči  $\vec{S}(\vec{r})$ . Statična člena magnetnega polja opisujeta magnetno energijo, ki niha v neposredni okolici naprave.

Sevalni členi električnega in magnetnega polja dajejo od nič različno  $\text{Re}[\vec{S}(\vec{r})] \neq 0$  realno komponento Poyntingovega vektorja. Delovna moč  $P(r \rightarrow \infty)$ , ki se iz vira širi v prostor v neskončnost, zahteva od nič različno sevalno upornost  $R_S > 0$  tokovne zanke. Majhna  $\sqrt{A'} \ll \lambda$  tokovna zanka ima razmeroma veliko induktivno reaktivno impedanco  $\omega L \gg R_S$  v primerjavi s sevalno upornostjo.

Praktično napravo izdelamo kot tuljavo velikega preseka  $A'$  z  $N$  ovoji. Sevalna upornost  $R_S = N^2 R_{SI}$  se pri tem povečuje s kvadratom števila ovojev. Induktivna reaktanca tuljave  $X_L = \omega L = N^2 \omega L_1$  se prav tako povečuje s kvadratom števila ovojev.

Višja induktivnost tuljave omogoča uporabo manjšega nastavljivega kondenzatorja za ugaševanje na rezonančno frekvenco  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Ker je upornost navitja tuljave  $R_{Cu} = N R_{Cu1}$  le premo-sorazmerna številu ovojev, z večanjem števila ovojev narašča kvaliteta tuljave

$Q = \omega L / R_{Cu} \approx N Q_1$ . Z večanjem števila ovojev narašča tudi sevalni izkoristek  $\eta = R_S / (R_{Cu} + R_S)$ .

V obdobju med obema svetovnima vojnoma v 20. stoletju se je uveljavila okvirna antena za sprejem srednjevalovnih oddajnikov. Okvirna antena je velika tuljava  $A' \approx 1\text{m}^2$ , ki hkrati deluje kot prvi nihajni krog, frekvenčno sito v preprostem sprejemniku z vakuumskimi elektronkami. Ker je okvirna antena magnetni dipol, je manj občutljiva na električno polje motilcev v neposredni bližini.

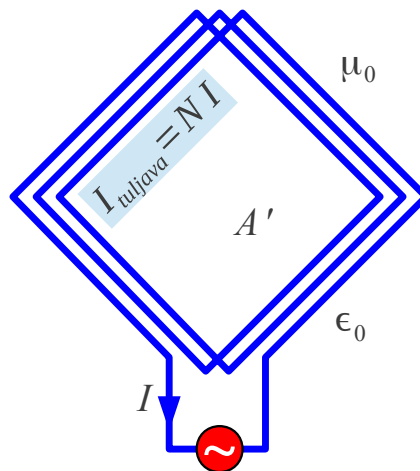
Pri sprejemu pokončno polariziranega elektromagnetnega valovanja ima okvirna antena dva ostra in točno določena minimuma (ničli) sprejema v vodoravni ravnini. Slednji pojav lahko koristno uporabimo tako, da z

obračanjem antene izločimo motnje neželenega oddajnika. Z okvirno anteno se začenja tudi radiolokacija, iskanje skritega oddajnika in radionavigacija z radijskim kompasom:

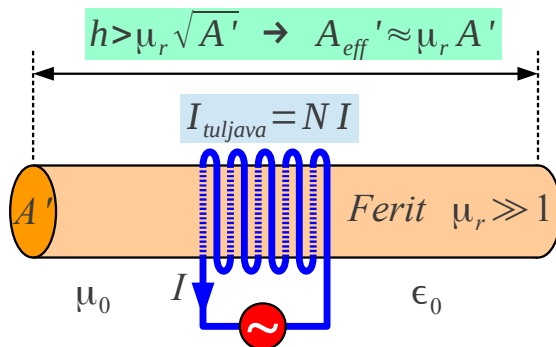
$$R_s = \frac{Z k^4 (N A')^2}{6 \pi} = \frac{8 \pi^3 Z}{3} \left( \frac{N A'}{\lambda^2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} f &\approx 300 \text{ kHz} \\ A' &\approx 1 \text{ m}^2 \\ N &\approx 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zrak} \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega \\ \lambda &= c_0 / f = 1 \text{ km} \\ R_s &\approx 3.1 \mu \Omega \end{aligned}$$



Okvirna antena ~1930



Feritna antena ~1970

$$R_s = \frac{Z k^4 (\mu_r N A')^2}{6 \pi} = \frac{8 \pi^3 Z}{3} \left( \frac{\mu_r N A'}{\lambda^2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} f &\approx 1 \text{ MHz} \\ A' &\approx 1 \text{ cm}^2 \\ h &\approx 20 \text{ cm} \\ \mu_r &\approx 100 \\ N &\approx 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zrak} \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega \\ \lambda &= c_0 / f = 300 \text{ m} \\ R_s &\approx 0.35 \mu \Omega \end{aligned}$$

Sodobna izvedba okvirne antene za srednje valove je feritna antena v tranzistorskih radijskih sprejemnikih. V frekvenčnem področju srednjih valov razpoložljivi feriti dosegajo relativno permeabilnost  $\mu_r \approx 100$ , kar omogoča 100-krat manjšo površino zanke.

Sevalna upornost tokovne zanke je izredno majhna, saj upada kar s četrto potenco valovne dolžine  $R_s = \alpha \lambda^{-4}$ . Sevalna upornost praktične okvirne antene oziroma praktične feritne antene je v razredu  $[\mu \Omega]$ . Kljub slabemu sevalnemu izkoristku je okvirna antena uporabna za sprejem srednjih valov, saj je v tem frekvenčnem pasu naravni šum za več velikostnih razredov večji od šuma vakuumskih elektronk. Polprevodniki imajo še nižji šum od vakuumskih elektronk, kar omogoča uporabo še manjše feritne sprejemne antene s še slabšim sevalnim izkoristkom od okvirne antene.

Tokovni element in tokovna zanka sta dualna zгледа. Električno polje tokovnega elementa ima zelo podobno obliko magnetnemu polju tokovne

zanke. Oba vsebujeta člene velikosti  $k^2/r$  (sevanje),  $k/r^2$  in  $1/r^3$  (statika) v merskih enotah  $[\text{m}^{-3}]$ . Na majhnih razdaljah  $kr \ll 1$  oziroma  $r \ll 1/k = \lambda/2\pi = c_0/\omega$  je največji statični člen  $1/r^3$ . Tokovni element se na majhnih razdaljah obnaša kot točkasti statični električni dipol. Tokovna zanka se na majhnih razdaljah obnaša kot točkasti statični magnetni dipol.

Magnetno polje tokovnega elementa ima zelo podobno obliko električnemu polju tokovne zanke. Oba vsebujeta člene velikosti  $k/r$  (sevanje) in  $1/r^2$  (Biot-Savart) v merskih enotah  $[\text{m}^{-2}]$ . Na razdalji  $kr=1$  oziroma  $r=1/k = \lambda/2\pi = c_0/\omega$  postanejo vsi členi poljubnega polja obeh osnovnih virov enako veliki.

Pri omrežni frekvenci  $f=50\text{Hz}$  z valovno dolžino  $\lambda=6000\text{km}$  v praznem prostoru postanejo členi enako veliki na razdalji  $r=955\text{km}$ . V elektroenergetiki večinoma povsem zadošča računanje s statičnimi členi. Vsi ostali členi vključno s sevanjem so zanemarljivo majhni.

Pri frekvenci vidne (zelene) svetlobe  $f=600\text{THz}$  z valovno dolžino  $\lambda=0.5\mu\text{m}$  v praznem prostoru postanejo členi enako veliki na razdalji  $r=80\text{nm}$ . V optiki večinoma povsem zadošča računanje s sevanjem. Vsi ostali členi vključno s statiko so zanemarljivo majhni.

Pri frekvenci radijske zveze  $f=900\text{MHz}$  z valovno dolžino  $\lambda=33\text{cm}$  v praznem prostoru postanejo vsi členi enako veliki na razdalji  $r=5.3\text{cm}$ . Pri mobilnem telefonu moramo biti previdni, kdaj smemo uporabljati samo sevanje, kdaj smemo uporabljati samo statiko oziroma kdaj moramo uporabljati točen izračun elektromagnetnega polja z vsemi členi!

Na velikih razdaljah  $kr \gg 1$  oziroma  $r \gg 1/k = \lambda/2\pi = c_0/\omega$  prevladuje sevanje kateregakoli osnovnega vira. Vsi ostali členi postanejo zanemarljivo majhni. Poenostavitve za sevanje niso zgolj matematični artefakt, pač pa imajo globlji fizikalni pomen in so nujne za razumevanje delovanja anten in pojavov pri razširjanju radijskih valov.

Elektromagnetno sevanje računamo preko enačb v diferencialni obliki, ki vsebujejo odvajanja v prostoru v obliki smernih odvodov, izvornosti in vrtinčenj. Kako praktično računamo odvode v krogelnih koordinatah  $(r, \Theta, \Phi)$  na velikih razdaljah  $r \gg \lambda/2\pi$ ?

Točen zapis potencialov oziroma polja vsebuje člene oblike  $r^{-n} e^{-jkr}$ , kjer je eksponent  $n=1,2,3$ . Na velikih razdaljah prevladajo členi z  $n=1$ . Členi z  $n \geq 2$  ali več tam postanejo zanemarljivo majhni. Odvajanje po

razdalji prinese:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^{-n} e^{-jkr} \right) = -n r^{-(n+1)} e^{-jkr} - jk r^{-n} e^{-jkr} \approx -jk r^{-n} e^{-jkr}$$

Pri točnem izračunu odvoda produkta smemo prvi člen zanemariti, saj upada z razdaljo bistveno hitreje od drugega člena. Na velikih razdaljah  $r \gg \lambda/2\pi$  se odvajanje po razdalji poenostavi v  $\partial/\partial r \approx -jk$ .

Odvajanje po smereh  $\Theta$  oziroma  $\Phi$  sicer ni enako nič. Pri izračunu smernega odvoda, izvornosti oziroma vrtinčenja odvajamo po razdaljah v smereh vseh treh koordinat. Laméjevi koeficienti  $h_\Theta$  in  $h_\Phi$  tedaj dodajo člen  $1/r$  vsem odvodom po smereh. Odvodi po smereh zato postanejo na velikih razdaljah  $r \gg \lambda/2\pi$  zanemarljivo majhni v primerjavi z odvodom po razdalji!

Fizikalna razlaga opisanih pojavov z matematičnimi odvodi je naslednja. Pri antenah in razširjanju valov imamo največkrat opraviti s kazalčno vsoto prispevkov istega velikostnega razreda. Pri tem se na velikih razdaljah  $r \gg \lambda/2\pi$  amplituda posameznih prispevkov spreminja zelo počasi, saj so relativne spremembe razdalje zelo majhne v primerjavi z absolutno razdaljo.

Obratno se faza tudi na velikih razdaljah  $r \gg \lambda/2\pi$  lahko hitro spreminja z razdaljo  $\Delta\phi = k \Delta r = (2\pi/\lambda) \Delta r$ , saj je hitrost spreminjanja odvisna od valovne dolžine, ne pa od absolutne vrednosti razdalje. V nalogah anten in razširjanja valov je spreminjanje faze daleč najpomembnejši podatek. Spreminjanje amplitude smemo pogosto zanemariti!

Smerni odvod, izvornost in vrtinčenje računamo s simboličnim vektorjem odvajanja  $\nabla$ , ki žal ima enostaven zapis samo v kartezičnih koordinatah  $(x, y, z)$ . Pri upoštevanju poenostavitev na velikih razdaljah  $r \gg \lambda/2\pi$  se odvajanje silno poenostavi celo v krogelnih koordinatah  $(r, \Theta, \Phi)$ . Odličen približek za simbolični vektor odvajanja postane preprosto  $\nabla = \vec{1}_r (-jk)$ , kar je še dosti bolj enostavno od kartezičnih koordinat  $(x, y, z)$ :

## Poenostavitve za sevanje

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$r \gg \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \approx -jk \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} \approx 0 \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Phi} \approx 0 \quad \nabla \approx \vec{1}_r (-jk)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \approx -\frac{jk}{\mu} \vec{1}_r \times \vec{A} = -\frac{j\omega}{Z} \vec{1}_r \times \vec{A} = \vec{1}_\Theta \frac{j\omega}{Z} A_\Phi - \vec{1}_\Phi \frac{j\omega}{Z} A_\Theta$$

$$\text{Lorenz } j\omega\mu \epsilon V + \text{div } \vec{A} = 0 \rightarrow V = \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \vec{A} \approx \frac{j}{\omega\mu\epsilon} (-jk) A_r = \frac{k A_r}{\omega\mu\epsilon} = \frac{A_r}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \nabla V \approx -j\omega \vec{A} + jk \vec{1}_r \frac{A_r}{\omega\mu\epsilon} = -j\omega \left[ \vec{A} - \vec{1}_r (\vec{1}_r \cdot \vec{A}) \right] = -j\omega \left[ \vec{1}_\Theta A_\Theta + \vec{1}_\Phi A_\Phi \right]$$

$$\text{Gauss } \frac{\rho}{\epsilon} = 0 = \nabla \cdot \vec{E} \approx -jk \vec{1}_r \cdot \vec{E} = -jk E_r \quad 0 = \nabla \cdot \vec{H} \approx -jk \vec{1}_r \cdot \vec{H} = -jk H_r$$

$$\text{Sevano polje } \vec{1}_r \perp \vec{H} \perp \vec{E} \perp \vec{1}_r \quad E_r = 0 \quad H_r = 0 \quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$$

$$\text{Faraday } \vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \text{rot } \vec{E} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E} \approx \frac{j}{\omega\mu} (-jk) \vec{1}_r \times \vec{E} = \frac{\vec{1}_r \times \vec{E}}{Z} = -\vec{1}_\Theta \frac{E_\Phi}{Z} + \vec{1}_\Phi \frac{E_\Theta}{Z}$$

$$\text{Poynting } \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \approx \frac{\vec{E} \times (\vec{1}_r \times \vec{E})^*}{2Z} = \vec{1}_r \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{2Z} = \vec{1}_r \frac{|\vec{E}|^2}{2Z} = \vec{1}_z \frac{|\vec{E}_{\text{eff}}|^2}{Z} \quad \vec{E}_{\text{eff}} = \frac{\vec{E}}{\sqrt{2}}$$

S preprostim simboličnim vektorjem odvajanja se izračun sevanja silno poenostavi. Pri izračunih magnetnega polja  $\vec{H}(\vec{r})$  in električnega polja  $\vec{E}(\vec{r})$  ugotovimo, da sevano polje nima vzdolžne komponente. Isto zahteva tudi Gaussov zakon za električno polje  $E_r = 0$  in magnetno polje  $H_r = 0$ .

Na velikih razdaljah  $r \gg \lambda/2\pi$  so električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$ , magnetno polje  $\vec{H}(\vec{r})$  in smer potovanja valovanja  $\vec{1}_r$  med sabo pravokotni. Električno polje in magnetno polje sta v točnem razmerju valovne impedance  $|\vec{E}(\vec{r})|/|\vec{H}(\vec{r})| = Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ . V praznem prostoru znaša valovna impedanca približno  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega \approx 120 \pi \Omega$ . Na velikih razdaljah torej zadošča, da navedemo samo eno polje, na primer samo električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$ , saj lahko iz njega preprosto določimo magnetno polje  $\vec{H}(\vec{r})$  in obratno.

Sevano električno polje in pripadajoče magnetno polje sta sofazna, zato je Poyntingov vektor gostote moči popolnoma realen. Poyntingov vektor sevanja kaže v smeri potovanja valovanja  $\vec{1}_r$  in ga lahko izračunamo zgolj

iz znanega električnega polja  $\vec{E}(\vec{r})$  .

Pri računu gostote pretoka moči moramo biti pozorni na merske enote. V teoretskih izpeljavah običajno uporabljamo vršno vrednost harmonske veličine  $|\vec{E}|$  v merskih enotah  $[V/m]$  . Merilni inštrumenti pogosto uporabljajo efektivno vrednost harmonske veličine  $|\vec{E}_{eff}|$  v merskih enotah  $[V_{eff}/m]$  . Za harmonske veličine velja znana povezava  $|\vec{E}_{eff}| = |\vec{E}|/\sqrt{2}$  .

V radijskih zvezah na velike razdalje uporabljamo elektromagnetno sevanje. Pri tem je popolnoma vseeno, ali imajo uporabljene antene v neposredni bližini zelo močno električno ali pa zelo močno magnetno polje oziroma nič od navedenega. V zvezi s sevanjem na velike razdalje lahko uporabimo različne vrste anten na obeh koncih zveze. Sevanje pomeni  $|\vec{E}(\vec{r})|/|\vec{H}(\vec{r})| = Z$  .

V zvezah na kratke razdalje lahko uporabimo tudi kapacitivni sklop ali pa induktivni sklop. Niti kapacitivni sklop niti induktivni sklop ne uporabljata sevanja. Na obeh koncih zveze moramo uporabiti enako vrsto antene. Na primer dva točkasta električna dipola  $|\vec{E}(\vec{r})| \gg Z|\vec{H}(\vec{r})|$  za kapacitivni sklop ali pa dva točkasta magnetna dipola  $|\vec{E}(\vec{r})| \ll Z|\vec{H}(\vec{r})|$  za induktivni sklop.

V praktični zvezi je na ovire najbolj občutljivo statično električno polje. Povrhu lahko statično električno polje proži nevarne iskre. Obratno prodre statično magnetno polje skozi večino ovir. V zvezah na kratke razdalje in za prenos energije se danes večinoma uporablja induktivni sklop.

Strogi predpisi elektromagnetne združljivosti (EMC) morajo upoštevati vse tri pojave: kapacitivni sklop, induktivni sklop in sevanje. Motnje merimo na predpisani razdalji od naprave, običajno  $r = 10m$  . Pri visokih frekvencah  $kr = (\omega/c_0)r \gg 1$  pri tem zadošča meritev gostote pretoka moči  $|\vec{S}|(\vec{r})$  oziroma efektivne vrednosti električnega polja  $|\vec{E}_{eff}(\vec{r})|$  . Pri nizkih frekvencah  $kr = (\omega/c_0)r \ll 1$  predpisi zahtevajo ločeni meritvi efektivne vrednosti električnega polja  $|\vec{E}_{eff}(\vec{r})|$  in efektivne vrednosti magnetnega polja  $|\vec{H}_{eff}(\vec{r})|$  .

\* \* \* \* \*